3° ARGOMENTO : FUNZIONI a VALORI VETTORIALI

Fino ad ora abbiamo studiato funzioni $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, cioè funzioni di più variabili ma a valori reali. Più in generale possiamo considerare funzioni a valori in uno spazio (vettoriale) $\mathbb{R}^m$ di dimensione $m > 1$.

<u>Definizione</u> (funzione di più variabili a valori vettoriali) - Una funzione di più variabili a valori vettoriali è una funzione

$$\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

dove A è il dominio di $\vec{F}$ e $n, m > 1$.

OSSERVAZIONE. Abbiamo già incontrato funzioni a valori vettoriali quando abbiamo studiato le curve: infatti una CURVA $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 (\mathbb{R}^3)$ è una funzione di variabile reale a valori vettoriali (in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$). Un altro esempio particolarmente rilevante si ottiene considerando il GRADIENTE di una funzione $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ($f: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$) derivabile su un aperto A: infatti $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$ (oppure $\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right)$) definisce una funzione $\nabla f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ($\nabla f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) di 2 (o 3) variabili a valori vettoriali (in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$).

Consideriamo ora per semplicità una funzione $\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che ad ogni $(x,y) \in A$ associa una coppia di valori reali $(F_1(x,y), F_2(x,y))$. Allora la funzione $\vec{F}$ si può vedere come una coppia (F_1, F_2) di due funzioni $F_{1,2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di due variabili reali a valori reali.
Le funzioni F_1, F_2 sono dette rispettivamente 1^a e 2^a COMPONENTE di $\vec{F}$.

ESEMPIO $\vec{F}(x,y)=(2x^2y,\ y\,\mathrm{sen}x)$

1^a componente $F_1(x,y)=2x^2y$

2^a componente $F_2(x,y)=y\,\mathrm{sen}x$.

Nei casi che ci interessano, abbiamo le seguenti componenti:

- $\vec{F}: A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ $\quad F_1,F_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $\quad F_1 = 1^a$ componente, $F_2 = 2^a$ componente
  $(x,y)\mapsto(F_1(x,y),F_2(x,y))$
- $\vec{F}: A\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ $\quad F_1,F_2,F_3:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ $\quad F_1 = 1^a$ componente, $F_2 = 2^a$ componente, $F_3 = 3^a$ componente
  $(x,y,z)\mapsto(F_1(x,y,z),F_2(x,y,z),F_3(x,y,z))$
- $\vec{F}: A\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ $\quad F_1,F_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ $\quad F_1 = 1^a$ componente, $F_2 = 2^a$ componente
  $(x,y,z)\mapsto(F_1(x,y,z),F_2(x,y,z))$
- $\vec{F}: A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ $\quad F_1,F_2,F_3:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $\quad F_1 = 1^a$ componente, $F_2 = 2^a$ componente, $F_3 = 3^a$ componente
  $(x,y)\mapsto(F_1(x,y),F_2(x,y),F_3(x,y))$

PROPRIETÀ delle FUNZIONI di più variabili a valori vettoriali

Data una funzione $\vec{F}:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ di più variabili a valori vettoriali, tutte le sue componenti $F_i:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $(i=1,..,m)$ sono funzioni a valori reali e quindi si può parlare, ad esempio, di continuità e di differenziabilità delle componenti F_i (secondo le definizioni date in precedenza).
Allora tutte le proprietà di $\vec{F}$ vengono definite attraverso le componenti. Ad esempio, diremo che

(i) $\vec{F}$ è CONTINUA in un punto $P_0\in A$

$$\Updownarrow$$

$\forall i=1,..,m$ F_i è continua in P_0

(ii) $\vec{F}$ è DERIVABILE in un punto $P_0\in A$ (A aperto)

$$\Updownarrow$$

$\forall i=1,..,m$ F_i è derivabile in P_0 ($\forall i\ \exists\nabla F_i(P_0)$)

(iii) F è DIFFERENZIABILE in un punto $P_0 \in A$ (A aperto)

$$\Updownarrow$$

$\forall i=1,\dots,m$ F_i è differenziabile in P_0.

Consideriamo ora un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ e una funzione $\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ derivabile in tutto A. Allora tutte le componenti F_i sono derivabili in A e possiamo costruire la matrice $\boxed{m \times n}$ delle derivate parziali di $\vec{F}$, detta MATRICE JACOBIANA di $\vec{F}$, avente su ogni riga il gradiente di una delle componenti:

$$J\vec{F} = \begin{pmatrix} \nabla F_1 \\ \nabla F_2 \\ \vdots \\ \nabla F_m \end{pmatrix}.$$

ESEMPI • Sia $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $\vec{F}(x,y) = (2x^2y, y\,\mathrm{sen}x)$. Calcolate la matrice $J\vec{F}$ in un generico punto (x,y) e nel punto $(\frac{\pi}{2},1)$. Abbiamo $F_1(x,y) = 2x^2y$, $F_2(x,y) = y\,\mathrm{sen}x$,

$$\underbrace{J\vec{F}(x,y)}_{\text{matrice } 2\times 2} = \begin{pmatrix} 4xy & 2x^2 \\ y\cos x & \mathrm{sen}x \end{pmatrix}, \quad J\vec{F}(\tfrac{\pi}{2},1) = \begin{pmatrix} 2\pi & \frac{\pi^2}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• Sia $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $\vec{F}(x,y,z) = (xyz, x+y+z, x^2y+y^2z)$. Calcolate la matrice $J\vec{F}$ in un generico punto (x,y,z) e nel punto $(0,1,1)$. Abbiamo $F_1(x,y,z) = xyz$, $F_2(x,y,z) = x+y+z$, $F_3(x,y,z) = x^2y+y^2z$,

$$\underbrace{J\vec{F}(x,y,z)}_{\text{matrice } 3\times 3} = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \\ 2xy & x^2+2yz & y^2 \end{pmatrix} \quad J\vec{F}(0,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

• Sia $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $\vec{F}(x,y,z) = (x-y, x^2+z^2)$. Calcolate la matrice $J\vec{F}$ in un generico punto (x,y,z) e nel punto $(2,2,2)$.

Abbiamo $F_1(x,y,z) = x-y$, $F_2(x,y,z) = x^2+z^2$,

$$J\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2x & 0 & 2z \end{pmatrix} \qquad J\vec{F}(2,2,2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

matrice 2×3

- Sia $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da $\vec{F}(x,y) = (x+2y, x^2y, xy^2)$. Calcolate la matrice $J\vec{F}$ in un generico punto (x,y) e nel punto $(1,1)$. Abbiamo $F_1(x,y) = x+2y$, $F_2(x,y) = x^2y$, $F_3(x,y) = xy^2$,

$$J\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2xy & x^2 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix} \qquad J\vec{F}(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

OSSERVAZIONE. Si nota dai primi due esempi (in cui la matrice $J\vec{F}$ è una matrice quadrata) che in generale la matrice $J\vec{F}$ non è simmetrica. Infatti in generale le componenti F_i sono funzioni indipendenti l'una dall'altra e non c'è ragione di aspettarsi una simmetria dello Jacobiano.

RAPPRESENTAZIONE delle funzioni di più variabili a valori vettoriali

Il grafico di una funzione di più variabili a valori vettoriali è un sottoinsieme di uno spazio che ha come minimo dimensione 4; è chiaro allora perché non si usa il disegno del grafico per visualizzare una funzione di questo tipo.

– Le interpretazioni più usate per comprendere il comportamento di funzioni di più variabili a valori vettoriali sono due

1ª INTERPRETAZIONE: Le funzioni $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (o $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) si interpretano come TRASFORMAZIONI del PIANO in se stesso (o TRASFORMAZIONI dello SPAZIO in se stesso)

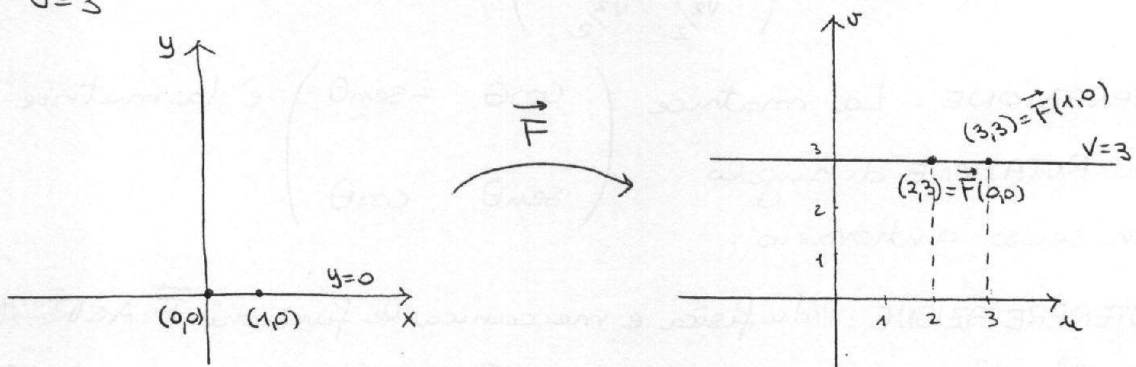
ESEMPI • Sia $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $\vec{F}(x,y)=(x+2,y+3)$.

Interpretare $\vec{F}$ come trasformazione del piano in se stesso significa pensare $\vec{F}$ come l'applicazione : $(x,y) \mapsto (u=F_1(x,y), v=F_2(x,y))$ dove (u,v) sono le coordinate del punto nel piano $\mathbb{R}^2$ di arrivo.

Di solito si scrive $\begin{cases} u=x+2 \\ v=y+3 \end{cases}$ per mettere in evidenza quanto valgono le coordinate (u,v) nel piano $\mathbb{R}^2$ di arrivo in funzione delle coordinate (x,y) nel piano $\mathbb{R}^2$ di partenza. Simili trasformazioni verranno utilizzate negli integrali multipli come CAMBIAMENTI di VARIABILI e allora (u,v) saranno le nuove variabili espresse in funzione delle vecchie variabili (x,y).

Nel caso di $\vec{F}(x,y)=(x+2,y+3)$ vediamo come $\vec{F}$ trasforma i punti:

$\vec{F}(0,0)=(2,3)$, $\vec{F}(1,0)=(3,3)$, la retta $y=0$ ha come immagine la retta $v=3$



In generale $\vec{F}(x,y)=(x,y)+(2,3)$ e $\vec{F}$ è la TRASLAZIONE di vettore $(2,3)$ che sposta ogni punto di 2 verso destra e di 3 verso l'alto.

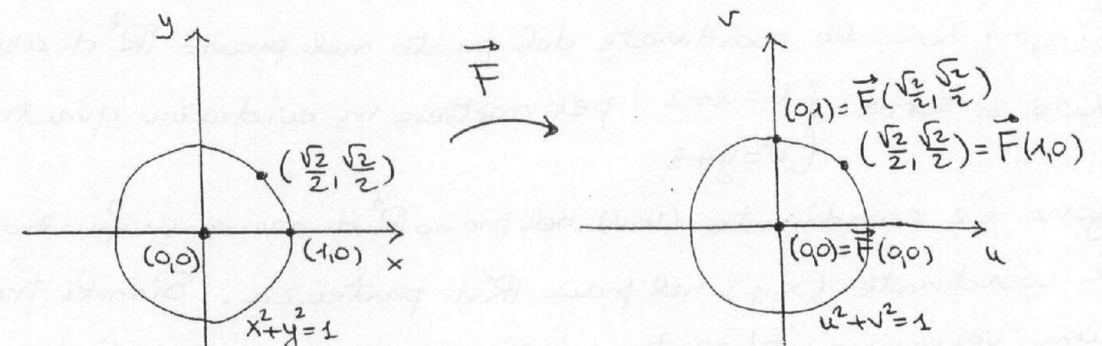
Risulta inoltre

$$J\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det J\vec{F} = 1$$

• Sia $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $\vec{F}(x,y)=\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}, \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)$. Per interpretare $\vec{F}$ come trasformazione del piano in se stesso scriviamo le equazioni $\begin{cases} u=\frac{x-y}{\sqrt{2}} \\ v=\frac{x+y}{\sqrt{2}} \end{cases}$ e vediamo come $\vec{F}$ trasforma i punti.

Abbiamo $\vec{F}(0,0)=(0,0)$, $\vec{F}(1,0)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\vec{F}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=(0,1)$

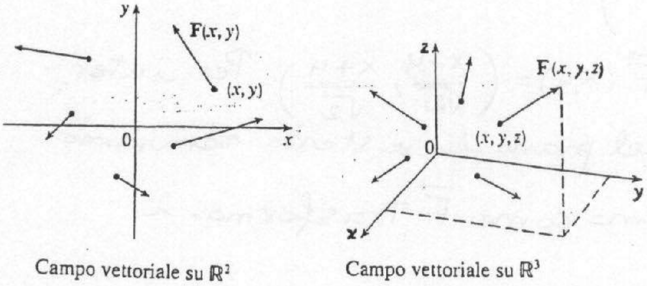
circonferenza di centro $(0,0)$ e $R=1$ $(x^2+y^2=1)$ ha come immagine se stessa, cioè $u^2+v^2=1$ (infatti $u^2+v^2=\frac{(x-y)^2}{2}+\frac{(x+y)^2}{2}=x^2+y^2=1$)



In generale $\vec{F}(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ e $\vec{F}$ è la ROTAZIONE di $\frac{\pi}{4}$ in senso antiorario (si veda l'osservazione sotto). Inoltre risulta $J\vec{F}(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}$, $\det J\vec{F}=1$.

OSSERVAZIONE. La matrice $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ è la matrice della ROTAZIONE di angolo θ in senso antiorario.

2^a INTERPRETAZIONE: In fisica e meccanica le funzioni $\vec{F}:A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\vec{F}:A\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, si interpretano come CAMPI di FORZE o CAMPI VETTORIALI. Un campo di forze è un'applicazione che ad ogni punto $(x,y)\in A$ (o $(x,y,z)\in A$) associa un vettore $\vec{F}(x,y)$ (o $\vec{F}(x,y,z)$) che rappresenta la forza che è applicata in quel punto.



Campo vettoriale su $\mathbb{R}^2$ Campo vettoriale su $\mathbb{R}^3$

In fisica il campo vettoriale $\vec{F}(x,y)=(F_1(x,y),F_2(x,y))$ si trova spesso indicato con $\vec{F}(x,y)=F_1(x,y)\,\underline{i}+F_2(x,y)\,\underline{j}$ essendo $(\underline{i},\underline{j})$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$, mentre $\vec{F}(x,y,z)=(F_1(x,y,z),F_2(x,y,z),F_3(x,y,z))$ con $\vec{F}(x,y,z)=F_1(x,y,z)\,\underline{i}+$ $+F_2(x,y,z)\,\underline{j}+F_3(x,y,z)\,\underline{k}$ essendo $(\underline{i},\underline{j},\underline{k})$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

ESEMPI • Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x,y) = (x,y)$.

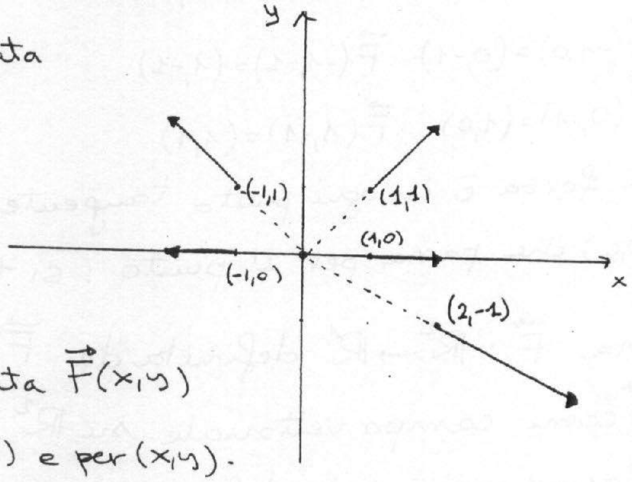
Interpretare $\vec{F}$ come campo vettoriale su $\mathbb{R}^2$ significa pensare $\vec{F}$ come l'applicazione che definisce in ogni punto (x,y) una forza di componenti (x,y). Disegnamo alcuni vettori:

$\vec{F}(0,0) = (0,0)$ in $(0,0)$ non è applicata alcuna forza

$\vec{F}(1,0) = (1,0)$ $\vec{F}(1,1) = (1,1)$

$\vec{F}(-1,0) = (-1,0)$ $\vec{F}(-1,1) = (-1,1)$

$\vec{F}(2,-1) = (2,-1)$



In ogni punto (x,y) la forza applicata $\vec{F}(x,y)$ giace sulla retta passante per $(0,0)$ e per (x,y).

Allora il campo è un campo CENTRALE REPULSIVO (perché la forza allontana dall'origine, si veda pag. 132).

Si noti che la stessa funzione a valori vettoriali $\vec{F}(x,y) = (x,y)$ interpretata come trasformazione del piano in se stesso avrebbe dato l'identità $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

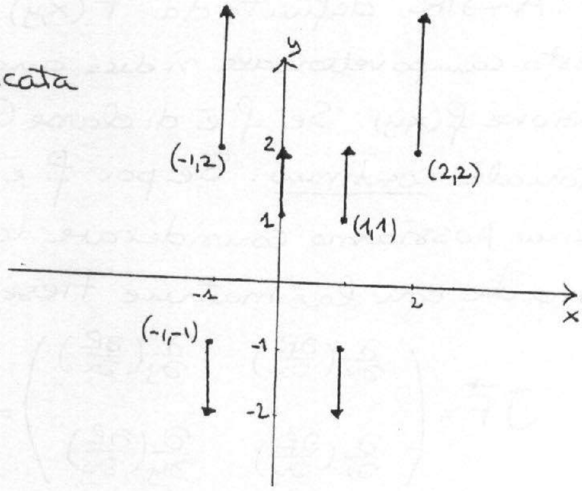
• Sia $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $\vec{F}(x,y) = (0,y)$. Interpretare $\vec{F}$ come campo vettoriale su $\mathbb{R}^2$ significa pensare $\vec{F}$ come l'applicazione che definisce in ogni punto (x,y) una forza di componenti $(0,y)$. Disegnamo alcuni vettori:

$\vec{F}(x,0) = (0,0)$ sull'asse x non è applicata alcuna forza

$\vec{F}(0,1) = (0,1)$ $\vec{F}(2,2) = (0,2)$

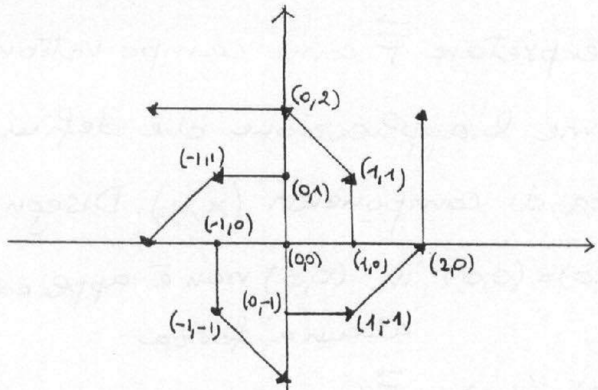
$\vec{F}(-1,2) = (0,2)$ $\vec{F}(1,-1) = (0,-1)$

$\vec{F}(x,1) = (0,1)\ \forall x$ $\vec{F}(x,-2) = (0,-2)\ \forall x$



Il campo $\vec{F}$ allontana dall'asse x.

• $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $F(x,y)=(-y,x)$. Disegnamo alcuni vettori: $\vec{F}(0,0)=(0,0)$ in $(0,0)$ non è applicata alcuna forza



$\vec{F}(1,0)=(0,1)$ $\quad \vec{F}(1,1)=(-1,1)$

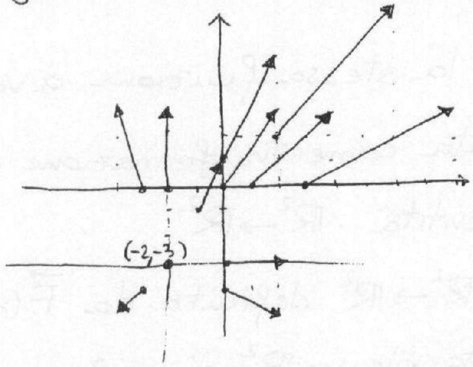
$\vec{F}(0,1)=(-1,0)$ $\quad \vec{F}(-1,1)=(-1,-1)$

$\vec{F}(-1,0)=(0,-1)$ $\quad \vec{F}(-1,-1)=(1,-1)$

$\vec{F}(0,-1)=(1,0)$ $\quad \vec{F}(1,-1)=(1,1)$

La forza è in ogni punto tangente alla circonferenza di centro $(0,0)$ che passa per il punto: si tratta di un CAMPO TANGENZIALE.

• Sia $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $\vec{F}(x,y)=(x+2, y+3)$. Interpretare $\vec{F}$ come campo vettoriale su $\mathbb{R}^2$ significa pensare $\vec{F}$ come l'applicazione che definisce in ogni punto (x,y) una forza di componenti $(x+2, y+3)$. Disegnamo alcuni vettori:



$\vec{F}(0,0)=(2,3)$ $\quad \vec{F}(1,0)=(3,3)$

$\vec{F}(0,1)=(2,4)$ $\quad \vec{F}(3,0)=(5,3)$

$\vec{F}(2,2)=(4,5)$ $\quad \vec{F}(-2,0)=(0,3)$

$\vec{F}(-1,-1)=(1,2)$ $\quad \vec{F}(-2,-3)=(0,0)$

$\vec{F}(-3,-4)=(-1,-1)$ $\quad \vec{F}(-3,0)=(-1,3)$

$\vec{F}(0,-4)=(2,-1)$ $\quad \vec{F}(0,-3)=(2,0)$.

• Sia $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su un aperto A; allora possiamo considerare il campo vettoriale

$$\vec{F}: A \to \mathbb{R}^2 \text{ definito da } \vec{F}(x,y)=\nabla f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right).$$

Questo campo vettoriale si dice anche CAMPO DEL GRADIENTE della funzione $f(x,y)$. Se f è di classe $C^1(A)$, allora $\vec{F}=\nabla f$ è un campo vettoriale <u>continuo</u>. Se poi f è derivabile due volte in A, allora possiamo considerare la <u>matrice Jacobiana</u> di $\vec{F}$, che coincide con la matrice Hessiana di f: infatti

$$J\vec{F}=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}=Hf.$$

Infine se $f \in C^2(A)$, allora la matrice $JF(x,y)$ è una matrice <u>simmetrica</u> $\forall (x,y) \in A$ per il Teorema di Schwarz.

Per il campo dei gradienti della funzione $f(x,y) = x^2+y^2$ si veda p. 131

In modo analogo si può definire il campo dei gradienti $\vec{F}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \right)$ di una funzione $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

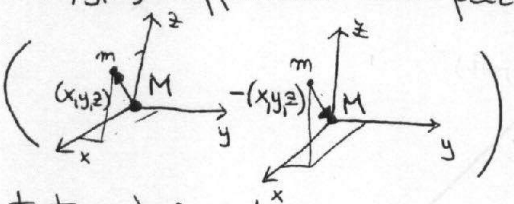
- CAMPO GRAVITAZIONALE TERRESTRE

Consideriamo la forza gravitazionale $\vec{F}$ esercitata dalla TERRA di massa M situata in $(0,0,0)$ (origine del sistema di riferimento in $\mathbb{R}^3$) su una particella di massa m posta in (x,y,z). Questa forza definisce un campo, detto CAMPO GRAVITAZIONALE, che per la legge di Newton è dato da

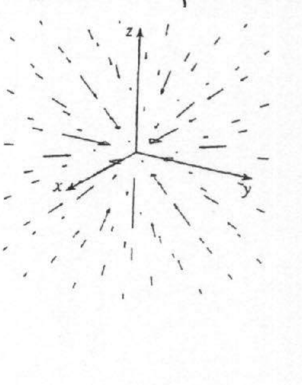
$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3 \qquad \vec{F}(x,y,z) = -\frac{GmM}{|(x,y,z)|^3}(x,y,z) =$$

$$= \left(\frac{-GmM}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} x , \frac{-GmM}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} y , \frac{-GmM}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} z \right)$$

dove G è la costante di gravitazione universale. Il vettore (x,y,z) è il vettore POSIZIONE della particella di massa m, il vettore $-(x,y,z)$ applicato alla particella va dal punto (x,y,z) all'origine

(

), allora la forza gravitazionale esercitata dalla terra sulla particella è diretta verso la terra (cioè verso $(0,0,0)$).



Campo di forza gravitazionale

Campo vettoriale definito dal gradiente della funzione

$f(x,y) = x^2+y^2$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = x^2+y^2$

$\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\vec{F}(x,y) = \nabla f(x,y) = (2x, 2y) = 2(x,y)$.

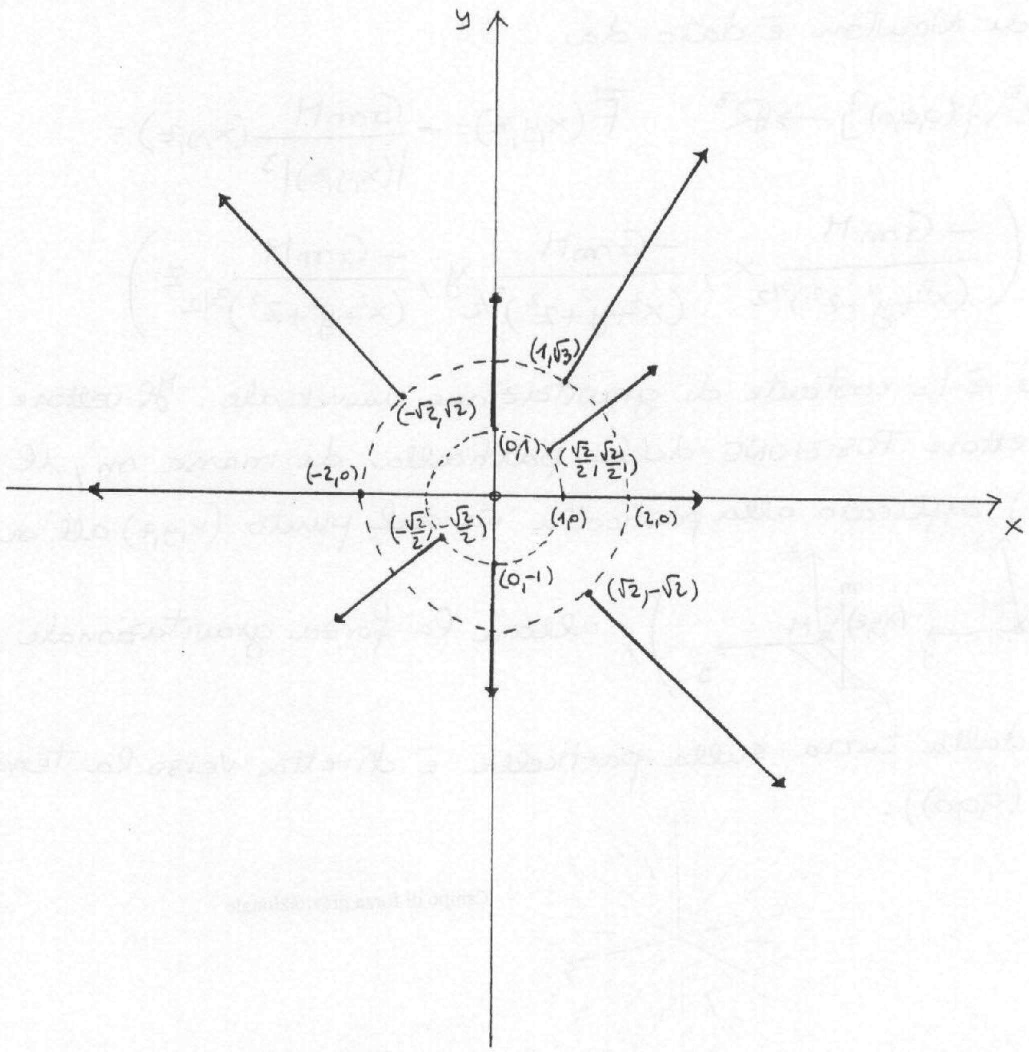
Si tratta di un campo CENTRALE REPULSIVO (è il campo disegnato a pag. 128 moltiplicato per 2)

$\vec{F}(0,0) = (0,0)$ $\vec{F}(0,1) = (0,2)$ $|\vec{F}(x,y)| = 4 \quad \forall (x,y) \in x^2+y^2=4$

$\vec{F}(1,0) = (2,0)$ $\vec{F}(-1,1) = (-2,2)$

$\vec{F}(1,1) = (2,2)$ $\vec{F}(-1,-1) = (-2,-2)$

$|\vec{F}(x,y)| = 2 \quad \forall (x,y) \in x^2+y^2=1$



OSSERVAZIONE - I campi vettoriali in cui la forza F applicata in un punto giace sulla retta passante per l'origine e per il punto si dicono CENTRALI - In particolare un campo centrale si dice ATTRATTIVO se la forza è diretta verso l'origine e REPULSIVO se è diretta verso l'esterno - Il campo dei gradienti di $f(x,y)=x^2+y^2$ è un campo centrale repulsivo, mentre il campo gravitazionale è un campo centrale attrattivo -

• CAMPO ELETTRICO

Supponiamo che una carica elettrica Q si trovi nell'origine (0,0,0) del sistema di riferimento in $\mathbb{R}^3$. Secondo la legge di Coulomb, la forza elettrica $\vec{F}(x,y,z)$ esercitata da questa carica su una carica q posta in un punto (x,y,z) è

$$\vec{F}(x,y,z)=\frac{\varepsilon q Q}{|(x,y,z)|^3}(x,y,z),$$

dove ε è una costante (che dipende dalle unità di misura utilizzate). Se le cariche sono di segno concorde, si ha che $qQ>0$ e la forza è repulsiva, se le cariche sono opposte, invece, $qQ<0$ e la forza è attrattiva.

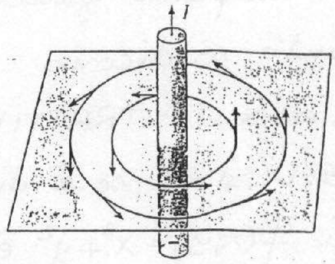
Invece di considerare la forza elettrica $\vec{F}$, in fisica si definisce di solito la forza per unità di carica

$$\vec{E}(x,y,z)=\frac{1}{q}\vec{F}(x,y,z)=\frac{\varepsilon Q}{|(x,y,z)|^3}(x,y,z)$$

che costituisce un campo vettoriale CENTRALE $\vec{E}:\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}\to\mathbb{R}^3$, detto CAMPO ELETTRICO.

• CAMPO MAGNETICO

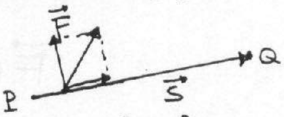
Una corrente continua I in un filamento conduttore induce un campo magnetico tangente a ogni cerchio che appartiene al piano perpendicolare all'asse del filo e il cui centro coincide con l'asse stesso.



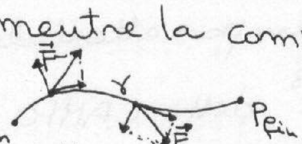
Se supponiamo che il filamento sia posto lungo l'asse z di un sistema di riferimento in $\mathbb{R}^3$ il campo magnetico sarà definito da $\vec{F}(x,y,z) = c(y,-x,0)$, dove c è una costante. Si tratta di un campo TANGENZIALE.

CAMPI VETTORIALI

Studiamo ora le proprietà di un campo vettoriale $\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ($\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$). Supponiamo che $\vec{F}$ sia CONTINUO (cioè tutte le componenti sono continue) e definito su un insieme A APERTO.



LAVORO di un campo vettoriale. Ricordiamo che il lavoro compiuto dalla forza costante $\vec{F}$ per spostare una particella da un punto P a un punto Q lungo il segmento è dato da $L = \langle \vec{F}, \vec{s} \rangle$, dove $\vec{s} = \vec{PQ}$ è il vettore spostamento. Allora $L = |\vec{F}| \cos\theta |\vec{s}|$, dove θ è l'angolo compreso fra $\vec{F}$ e $\vec{s}$, cioè il lavoro è il prodotto della componente (con segno) della forza $\vec{F}$ nella direzione dello spostamento per la lunghezza dello spostamento. Infatti la componente che lavora è quella nella direzione dello spostamento, mentre la componente ortogonale risulta inutile.



Consideriamo ora un campo vettoriale continuo $\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e una curva $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1 con sostegno interamente contenuto in A. Vogliamo calcolare il lavoro $L_\gamma(\vec{F})$ compiuto da questo campo per spostare una particella lungo la traiettoria individuata dalla curva γ. Il campo vettoriale $\vec{F}$ in

... non è costante su γ: punto per punto la componente che lavora è quella nella direzione tangente alla curva γ, detta componente tangenziale della forza, definita da $<\vec{F}, \frac{\gamma'}{|\gamma'|}>$. Allora il lavoro sarà l'integrale su γ della componente tangenziale della forza che è una funzione a valori reali definita e continua sul sostegno di γ (è continua perchè sono continue le componenti di $\vec{F}$ e anche le componenti di γ' in quanto $\gamma \in C^1$). Per definizione di integrale di una funzione su una curva otteniamo che il lavoro è dato da

$$L_\gamma(\vec{F}) = \int_\gamma <\vec{F}, \frac{\gamma'}{|\gamma'|}> = \int_a^b <\vec{F}(x(t),y(t)), \gamma'(t)> dt =$$

$$(1) \qquad = \int_a^b [F_1(x(t),y(t))\,x'(t) + F_2(x(t),y(t))\,y'(t)]\,dt.$$

In modo analogo, se $\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale continuo e $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ è una curva di classe C^1 con sostegno interamente contenuto in A, otteniamo

$$L_\gamma(\vec{F}) = \int_a^b [F_1(x(t),y(t),z(t))\,x'(t) + F_2(x(t),y(t),z(t))\,y'(t) + F_3(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)]\,dt.$$
(2)

<u>Definizione</u> (lavoro di un campo vettoriale su una curva). Sia $\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ($\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) un campo vettoriale <u>continuo</u> definito su un aperto A e sia $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ($\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^3$) una curva di classe C^1 il cui sostegno è interamente contenuto in A. Allora il LAVORO del campo vettoriale $\vec{F}$ su γ è dato da

$$L_\gamma(\vec{F}) = \int_a^b <\vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t)> dt,$$

che corrisponde in $\mathbb{R}^2$ a (1) e in $\mathbb{R}^3$ a (2).

OSSERVAZIONE - Si dimostra che il lavoro non dipende dalla parametrizzazione della curva purché sia conservato il verso di percorrenza; cambia invece di segno se la parametrizzazione cambia il verso (infatti il versore tangente $T = \frac{\gamma'}{|\gamma'|}$ cambia verso quando la curva viene percorsa in verso opposto).

OSSERVAZIONE - In alcuni testi, assegnati un campo vettoriale $\vec{F}$ e una curva γ come nella nostra definizione di lavoro, si definisce l'integrale di un campo vettoriale su una curva come

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt$$

dove $\cdot$ indica il prodotto scalare tra 2 vettori e, seguendo una notazione comune in fisica, $\vec{r}(t)$ è il VETTORE POSIZIONE del punto che in questo caso si muove su γ (cioè $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ se γ è a valori in $\mathbb{R}^2$ e $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ se γ è a valori in $\mathbb{R}^3$).

Si noti che la formula a secondo membro che definisce l'integrale è esattamente la stessa che abbiamo usato per definire il lavoro e infatti il significato fisico dell'integrale di un campo su una curva è esattamente il lavoro compiuto dal campo $\vec{F}$ lungo il percorso individuato da γ - Nei testi in cui si fa questa scelta, l'integrale di un campo vettoriale su una curva viene detto INTEGRALE CURVILINEO di 2ª SPECIE per distinguerlo dall'integrale di una funzione su una curva che viene detto invece INTEGRALE CURVILINEO di 1ª SPECIE.

Notiamo però che si tratta di una seria contraddizione: un campo non è che una funzione (a valori in $\mathbb{R}^n$) e l'<u>integrale</u> di una <u>funzione</u> è già stato definito in modo del tutto diverso; quindi il termine "integrale di $\vec{F}$ su γ" andrebbe riservato alla quantità $\int_a^b \vec{F}(\gamma(t))|\gamma'(t)|\,dt$, che è un vettore di componenti gli integrali $\int_a^b F_i(\gamma(t))|\gamma'(t)|\,dt$ delle componenti F_i.

Noi parleremo allora di integrale di una funzione su una curva e di lavoro di un campo vettoriale su una curva.

OSSERVAZIONE. Come già visto per la definizione di integrale di una funzione su una curva, la definizione di lavoro di un campo vettoriale $\vec{F}$ su una curva, che è data per curve di classe C^1, si estende facilmente alle curve C^1 a tratti. Il lavoro di $\vec{F}$ lungo γ è la somma dei lavori compiuti da $\vec{F}$ su ciascun tratto C^1 di γ:

$$L_\gamma(\vec{F}) = L_{\gamma_1}(\vec{F}) + L_{\gamma_2}(\vec{F}) + \dots + L_{\gamma_k}(\vec{F}).$$

ESEMPI • Calcolate il lavoro compiuto dal campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = (-2y, x)$ lungo le seguenti curve:

$$\gamma_1 \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases} t \in [0,\pi] \quad \gamma_2 \begin{cases} x = -\cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases} t \in [0,\pi] \quad \gamma_3 \begin{cases} x = t \\ y = t^2 - 1 \end{cases} -1 \le t \le 1$$

$$\gamma_4 \begin{cases} x = 2t \\ y = 4t^2 - 1 \end{cases} -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}.$$

$$L_{\gamma_1}(\vec{F}) = \int_0^\pi [(-2\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) + \cos t \cdot \cos t]\, dt = \int_0^\pi (\operatorname{sen}^2 t + 1)\, dt =$$

$$= \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \cos t\right]_0^\pi + \pi = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3}{2}\pi$$

$$L_{\gamma_2}(\vec{F}) = \int_0^\pi [(-2\operatorname{sen} t)\operatorname{sen} t + (-\cos t)\cos t]\, dt = \int_0^\pi (-\operatorname{sen}^2 t - 1)\, dt =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \cos t\right]_0^\pi - \pi = -\frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{3}{2}\pi$$

$$L_{\gamma_3}(\vec{F}) = \int_{-1}^1 [-2(t^2-1) + t \cdot 2t]\, dt = \int_{-1}^1 (-\cancel{2t^2} + 2 + \cancel{2t^2})\, dt = 4$$

$$L_{\gamma_4}(\vec{F}) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [-2(4t^2-1) \cdot 2 + 2t \cdot 8t]\, dt = \int_{-1/2}^{1/2} [\cancel{-16t^2} + 4 + \cancel{16t^2}]\, dt = 4$$

Si noti che $L_{\gamma_2}(\vec{F}) = -L_{\gamma_1}(\vec{F})$: infatti γ_1 e γ_2 descrivono la stessa mezza circonferenza percorsa in versi opposti.

Invece $L_{\gamma_3}(\vec{F}) = L_{\gamma_4}(\vec{F})$ perché γ_3 e γ_4 sono 2 diverse parametrizzazioni dello stesso tratto di parabola e hanno lo stesso verso.

Infine si osservi che $L_{\gamma_2}(\vec{F}) \neq L_{\gamma_3}(\vec{F})$ anche se γ_2 e γ_3 hanno lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale e quindi possiamo osservare che il lavoro di questo campo $\vec{F}$ dipende dal percorso compiuto tra il punto iniziale e quello finale.

- Calcolate $L_\gamma(\vec{F})$ dove $\vec{F}(x,y,z) = (xy, yz, zx)$ e γ è la CUBICA RITORTA $\gamma \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$ $0 \le t \le 1$ (γ è stata disegnata a pag. 118).

$$L_\gamma(\vec{F}) = \int_0^1 [t^3 + t^5 \cdot 2t + t^4 \cdot 3t^2]\,dt = \left[\frac{t^4}{4} + 5\frac{t^7}{7}\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{5}{7} = \frac{27}{28}$$

- Calcolate il lavoro compiuto dal campo gravitazionale (p. 130) su una curva $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ di classe C^1.

$$L_\gamma(\vec{F}) = -GmM \int_a^b \frac{1}{(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t))^{3/2}} (x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + z(t)z'(t))\,dt =$$

$$= -\frac{GmM}{2} \int_a^b \left[(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t))^{-3/2} \cdot \frac{d}{dt}(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t))\right] dt =$$

$$= -\frac{GmM}{2} \left[\frac{(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t))^{-1/2}}{-1/2}\right]_{t=a}^{t=b} =$$

$$= GmM \left[\frac{1}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}}\right]_{t=a}^{t=b} =$$

$$= GmM \left[\frac{1}{\sqrt{x^2(b)+y^2(b)+z^2(b)}} - \frac{1}{\sqrt{x^2(a)+y^2(a)+z^2(a)}}\right] =$$

$$= GmM \left(\frac{1}{|\gamma(b)|} - \frac{1}{|\gamma(a)|}\right).$$

Osserviamo che il lavoro compiuto da $\vec{F}$ non dipende dal percorso γ seguito, ma solo dagli estremi $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$.

- calcolare il lavoro compiuto dal campo dei gradienti $\vec{F} = \nabla f$ di una funzione $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 su una curva $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1 con sostegno contenuto in A.

Essendo $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ e $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$ il lavoro sarà

$$L_\gamma(\vec{F}) = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\, y'(t) \right] dt =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{d}{dt}\left(f(x(t),y(t)) \right) \right] dt \quad \text{per la formula di derivazione di funzione composta}$$

$$= \left[f(x(t),y(t)) \right]_{t=a}^{t=b} = f(x(b),y(b)) - f(x(a),y(a)) =$$

$$= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(\text{Punto finale}) - f(\text{punto iniziale}).$$

Con gli stessi passaggi si ottiene lo stesso risultato per $f: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^3$.

Osserviamo allora che per tutti i campi vettoriali che sono il gradiente di una funzione di classe C^1 il lavoro non dipende dal percorso γ seguito, ma solo dagli estremi $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$.

<u>Definizione</u> (CAMPO CONSERVATIVO). Un campo vettoriale <u>continuo</u> $\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ($\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) definito su un aperto A si dice CONSERVATIVO se esiste $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ($f: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$) <u>di classe C^1</u> tale che $\vec{F} = \nabla f$.

La funzione $f(x,y)$ ($f(x,y,z)$) si dice POTENZIALE associato al campo vettoriale $\vec{F}$.

OSSERVAZIONE. Se f è un potenziale associato al campo vettoriale $\vec{F}$, allora tutte le funzioni del tipo $f + c$ ($c \in \mathbb{R}$)

sono ancora potenziali associati allo stesso campo.

<u>TEOREMA</u> (calcolo del lavoro di un campo conservativo).
Sia $\vec{F}: A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ($\vec{F}: A\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$) un campo vettoriale CONSERVATIVO definito su un aperto A e sia $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ ($\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$) una curva <u>$C^1$ a tratti</u> con sostegno interamente contenuto in A. Allora

$$L_\gamma(\vec{F}) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(P_{fin}) - f(P_{in}),$$

dove f è un qualunque potenziale associato a $\vec{F}$.

<u>dimostrazione</u>. Abbiamo già dimostrato a pag. 96 che il risultato vale se γ è di classe C^1. Se γ è C^1 a tratti indichiamo con $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ i tratti di γ di classe C^1. Allora

$$L_\gamma(\vec{F}) = L_{\gamma_1}(\vec{F}) + L_{\gamma_2}(\vec{F}) + \dots + L_{\gamma_{k-1}}(\vec{F}) + L_{\gamma_k}(\vec{F}) =$$

$$= f(P_{fin}\gamma_1) - f(P_{in}\gamma_1) + f(P_{fin}\gamma_2) - f(P_{in}\gamma_2) + \dots$$

$$+ f(P_{fin}\gamma_{k-1}) - f(P_{in}\gamma_{k-1}) + f(P_{fin}\gamma_k) - f(P_{in}\gamma_k) =$$ essendo $P_{fin}\gamma_1 = P_{in}\gamma_2$, $P_{fin}\gamma_2 = P_{in}\gamma_3$, $\vdots$, $P_{fin}\gamma_{k-1} = P_{in}\gamma_k$

$$= f(P_{fin}\gamma_k) - f(P_{in}\gamma_1) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

∎

OSSERVAZIONE (IMPORTANTE). Se $\vec{F}$ è conservativo, allora

(1) $L_{\gamma_1}(\vec{F}) = L_{\gamma_2}(\vec{F})$ per qualunque coppia di curve γ_1, γ_2 C^1 a tratti aventi gli stessi estremi (cioè lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale);

(2) $L_\gamma(\vec{F}) = 0$ per ogni curva γ C^1 a tratti e CHIUSA.

In realtà si dimostra che le condizioni (1) e (2) sono equivalenti alla definizione di conservativo.

Teorema (caratterizzazione dei campi conservativi o equivalenza delle 3 condizioni).

Sia $\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ($\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) un campo vettoriale continuo definito su un aperto CONNESSO A. Le seguenti tre proprietà sono tra di loro equivalenti:

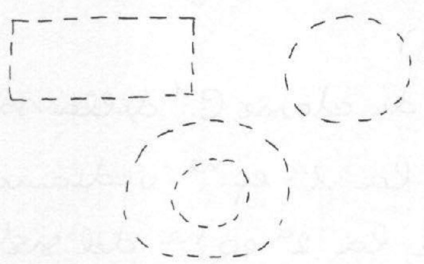
(1) $\vec{F}$ è conservativo;

(2) $L_\gamma(\vec{F}) = 0$ per ogni curva C^1 a tratti e CHIUSA contenuta in A;

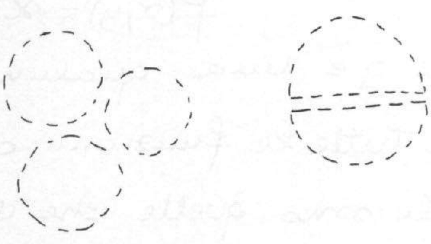
(3) $L_{\gamma_1}(\vec{F}) = L_{\gamma_2}(\vec{F})$ per ogni coppia γ_1, γ_2 di curve C^1 a tratti contenute in A aventi lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale.

OSSERVAZIONE (IMPORTANTE). Un campo $\vec{F}$ non è conservativo se esistono due curve γ_1, γ_2 C^1 a tratti aventi gli stessi estremi tali che $L_{\gamma_1}(\vec{F}) \neq L_{\gamma_2}(\vec{F})$, oppure se esiste una curva chiusa C^1 a tratti su cui $L_\gamma(\vec{F}) \neq 0$.

OSSERVAZIONE. Il teorema precedente è enunciato su un aperto connesso. Un aperto A del piano o dello spazio si dice connesso (si veda la definizione a pag. 52) se comunque presi due punti di A è possibile congiungerli (con il sostegno di una curva) senza uscire da A. Un aperto è dunque connesso se è costituito da un solo pezzo, mentre un aperto non è connesso se è composto di due o più pezzi separati.



aperti connessi



aperti non connessi

Se A è un aperto non connesso, allora il teorema precedente si applica separatamente su ognuno degli aperti connessi che lo compongono e continua ad essere vero. Tuttavia si è preferito mettere in evidenza che ogni pezzo connesso di A è indipendente dagli altri: infatti il campo vettoriale $\vec{F}$ potrebbe essere definito in maniera completamente diversa nei vari pezzi e quindi avere un potenziale diverso da un pezzo all'altro. Quando poi si deve calcolare il lavoro compiuto da $\vec{F}$ su γ, la curva è necessariamente contenuta in uno degli aperti connessi che compongono A. Allora tanto vale lavorare su un aperto connesso fin dall'inizio.

ESEMPI • Il campo vettoriale $\vec{F}(x,y)=(-2y,x)$ definito su $\mathbb{R}^2$ non è conservativo perchè il $L_\gamma(\vec{F})$ dipende dal percorso γ: infatti abbiamo trovato (a pag. 136) due curve γ_2, γ_3 aventi gli stessi estremi per cui $L_{\gamma_2}(\vec{F}) \neq L_{\gamma_3}(\vec{F})$.

• Il campo vettoriale $\vec{F}(x,y)=(2xy+\cos x,\ x^2+e^y)$ definito su $\mathbb{R}^2$ è conservativo. Infatti ammette potenziale: il potenziale è una funzione $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy+\cos x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2+e^y . \end{cases}$$

Le soluzioni della 1ª equazione sono tutte le funzioni $f(x,y)$ con derivata rispetto a x uguale a $2xy+\cos x$, cioè

$$f(x,y) = x^2y + \operatorname{sen} x + g(y)$$

dove g è una qualunque funzione di classe C^1 della sola y. Fra tutte le funzioni che verificano la 1ª eq.ne vediamo quali sono quelle che verificano anche la 2ª eq.ne del sistema cioè hanno derivata rispetto a y uguale a x^2+e^y.

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2y+\operatorname{sen}x+g(y)) = \cancel{x^2}+g'(y) = \cancel{x^2}+e^y$$

$$\Rightarrow g'(y)=e^y \quad \text{cioè} \quad g(y)=e^y+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

I potenziali di $\vec{F}$ sono allora tutte le funzioni

$$f(x,y)=x^2y+\operatorname{sen}x+e^y+c \quad ,\ c\in\mathbb{R}.$$

- Il campo vettoriale $\vec{F}(x,y)=\left(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ non è conservativo sul suo dominio (cioè $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$): infatti il lavoro compiuto da $\vec{F}$ su $\gamma\begin{cases}x=\cos t\\ y=\operatorname{sen}t\end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$ (che è una curva chiusa) è dato da

$$L_\gamma(\vec{F})=\int_0^{2\pi}[-\operatorname{sen}t(-\operatorname{sen}t)+\cos t\cos t]\,dt=\int_0^{2\pi}dt=2\pi\neq 0.$$

- Il campo gravitazionale

$$\vec{F}(x,y,z)=\left(-\frac{GmM}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}x,\ -\frac{GmM}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}y,\ -\frac{GmM}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}z\right)$$

è conservativo sul suo dominio $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$. È già stato dimostrato a pag. 137 che il lavoro è indipendente dal percorso e dalla formula trovata si deduce anche che un potenziale è dato da $f(x,y,z)=\frac{GmM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Tuttavia proviamo a determinare tutti i potenziali $f:\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}\to\mathbb{R}$ (di classe C^1) come soluzioni del sistema

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{GmM}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}x\\ \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{GmM}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}y\\ \frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{GmM}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}z.\end{cases}$$

Osservato che $\int x\,(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\,(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}}{-1/2} + g(y,z) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + g(y,z),$$ otteniamo che

tutte le funzioni che verificano la 1ª eq.ne sono date da

$$f(x,y,z) = \frac{GmM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + g(y,z)$$

dove g è una qualunque funzione di classe C^1 delle variabili y e z. Tra queste, quelle che verificano la 2ª eq.ne sono quelle tali che

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{GmM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + g(y,z)\right) = -\frac{GmM}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,y.$$

Otteniamo allora $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$, cioè $g(y,z) = h(z)$.

Le funzioni che verificano le prime 2 eq.ni sono quindi

$$f(x,y,z) = \frac{GmM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + h(z).$$

Rimane da sostituire nella 3ª eq.ne:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{GmM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + h(z)\right) = -\frac{GmM}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,z,$$

cioè $h'(z) = 0$, da cui $h(z) = c$.

Tutti i potenziali del campo gravitazionale sono allora le funzioni

$$f(x,y,z) = \frac{GmM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + c \quad (c\in\mathbb{R}).$$

CONDIZIONI NECESSARIE AFFINCHÈ UN CAMPO VETTORIALE SIA CONSERVATIVO

Sia $\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale CONSERVATIVO di classe C^1 (cioè le componenti F_1 e F_2 hanno derivate parziali prime continue su A). Essendo $\vec{F}$ conservativo $\exists$ il potenziale $f: A \to \mathbb{R}$ di classe C^2 tale che $\vec{F} = \nabla f$, cioè

$$F_1(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad F_2(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Per il teorema di Schwartz risulta allora

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Abbiamo dunque dimostrato che se $\vec{F}$ è un campo conservativo di classe C^1, allora deve necessariamente avere uguali la derivata della 1ª componente rispetto alla 2ª variabile e la derivata della 2ª componente rispetto alla 1ª variabile (dette derivate in croce), cioè

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \qquad \forall (x,y) \in A.$$

Se invece $\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale definito su un aperto di $\mathbb{R}^3$, conservativo e di classe C^1, allora il potenziale sarà una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ di classe C^2 tale che

$$F_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \; F_2 = \frac{\partial f}{\partial y}, \; F_3 = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Applicando il teorema di Schwartz, dall'uguaglianza delle 3 derivate 2ᵉ miste $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right)$ otteniamo 3 condizioni:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

Abbiamo dunque che tutte le possibili derivate in croce sono uguali.

OSSERVAZIONE. Se $\vec{F}$ è definito su $\mathbb{R}^n$, allora si trovano $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ condizioni.

TEOREMA (CONDIZIONI NECESSARIE AFFINCHÈ UN CAMPO SIA CONSERVATIVO). Sia $\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ($\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) un campo vettoriale conservativo di classe C^1 definito su un aperto A. Allora tutte le derivate in croce sono uguali.

In particolare, se $\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ abbiamo solo

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \quad \text{in } A,$$

mentre se $\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ risulta

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} \quad \text{in } A.$$

OSSERVAZIONE. Si tratta di una condizione necessaria: se $\vec{F}$ è conservativo, allora le derivate in croce devono essere necessariamente uguali. Pertanto, se le derivate in croce non sono uguali, si può subito concludere che $\vec{F}$ non è conservativo.

Ad esempio il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = (-2y, x)$ definito su $\mathbb{R}^2$ non è conservativo perché $\frac{\partial F_1}{\partial y} = -2 \neq 1 = \frac{\partial F_2}{\partial x}$.

Analogamente il campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z) = \left(x, 2y^2, \frac{1}{y^2+z^2}\right)$ definito su $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } x\}$ non è conservativo perché ad esempio $\frac{\partial F_2}{\partial z} = 0 \neq \frac{-2y}{(y^2+z^2)^2} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$ (le altre due condizioni sono verificate).

OSSERVAZIONE. La condizione è necessaria, ma non sufficiente, cioè avere le derivate in croce uguali non è sufficiente per concludere che $\vec{F}$ è conservativo.

Ad esempio il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ ha le derivate in croce uguali perchè

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right),$$

ma abbiamo già visto a pag. 142 che non è conservativo (il lavoro lungo la circonferenza di $C(0,0)$, $R=1$ in verso antiorario viene 2π),

Dato un campo $\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ si può definire il ROTORE di $\vec{F}$ come il vettore $\operatorname{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$.

Si noti che le componenti del rotore sono differenze di derivate in croce; pertanto se $\vec{F}$ è conservativo risulta che $\operatorname{rot}\vec{F} = \underline{0} = (0,0,0)$.

Se chiamiamo irrotazionale un campo con $\operatorname{rot}\vec{F} = \underline{0}$, allora possiamo scrivere in un altro modo la condizione necessaria per campi definiti su $\mathbb{R}^3$.

Più precisamente

<u>Definizione</u> (CAMPO IRROTAZIONALE) Un campo vettoriale $\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di classe C^1 sull'aperto A si dice IRROTAZIONALE se $\operatorname{rot}\vec{F} = \underline{0} = (0,0,0)$.

TEOREMA (COND. NECESSARIE AFFINCHÈ UN CAMPO su $\mathbb{R}^3$ SIA CONSERVATIVO) - Sia $\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 definito su un aperto A.
Se $\vec{F}$ è conservativo, allora $\vec{F}$ è irrotazionale -

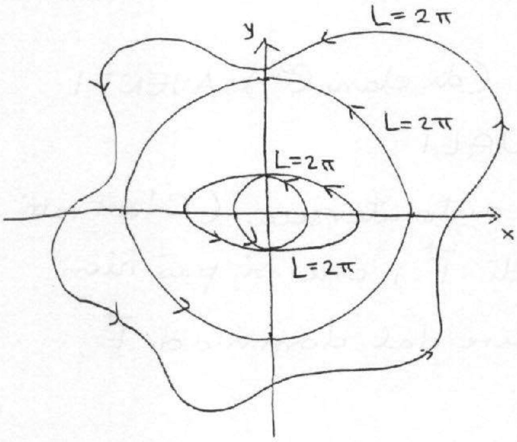
CONDIZIONI SUFFICIENTI AFFINCHÈ UN CAMPO VETTORIALE SIA CONSERVATIVO

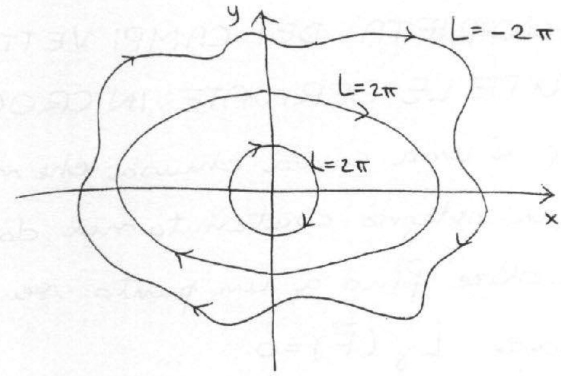
Sia $\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ($\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) un campo vettoriale di classe C^1. Quali proprietà deve avere $\vec{F}$ per essere conservativo? Abbiamo già dimostrato che $\vec{F}$ deve avere tutte le derivate in croce uguali - Tuttavia questa proprietà da sola non è sufficiente perchè esistono campi non conservativi aventi le derivate in croce uguali, come ad esempio il campo $\vec{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (si veda p. 146).
Ripartiamo proprio da questo esempio per capire quali siano le proprietà di un campo avente tutte le derivate in croce uguali e quali ipotesi aggiuntive si possano fare per ottenere che il campo sia conservativo.

ESEMPIO: $\vec{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$

Abbiamo dimostrato che il campo $\vec{F}$ non è conservativo calcolando il lavoro $L_\gamma(\vec{F}) = 2\pi \neq 0$ lungo la circonferenza γ di centro l'origine e $R=1$ percorsa in verso antiorario.
Se calcoliamo il lavoro di $\vec{F}$ lungo la circonferenza di $C(0,0)$ e raggio R percorsa in verso antiorario otteniamo 2π per ogni R e lo stesso avviene su ogni ellisse di $C(0,0)$ percorsa in verso antiorario. In realtà si ottiene sempre lo stesso risultato lungo qualunque curva chiusa che giri una volta in senso antiorario intorno all'origine -
Se invece calcoliamo il lavoro di $\vec{F}$ sulla circonferen=

za di $C(0,0)$ e $R=1$ percorsa in verso orario otteniamo (-2π) e lo stesso risultato si ottiene su qualunque curva chiusa che giri una volta in senso orario intorno all'origine.



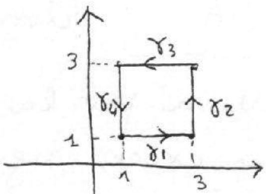


Questo risultato non è un caso.

1ª PROPRIETÀ DEI CAMPI VETTORIALI (di classe C^1) AVENTI TUTTE LE DERIVATE IN CROCE UGUALI:

Se due curve chiuse γ_1, γ_2 (C^1 a tratti e con sostegno contenuto nel dominio di $\vec{F}$) si possono trasformare con continuità una nell'altra conservando anche il verso e senza uscire dal dominio di $\vec{F}$, allora $L_{\gamma_1}(\vec{F}) = L_{\gamma_2}(\vec{F})$.

Calcoliamo ora il lavoro di $\vec{F}$ sul bordo del quadrato di vertici $(1,1), (3,1), (3,3), (1,3)$ percorso in verso antiorario.



$$L_{\gamma_1}(\vec{F}) = L_{\gamma_4}(\vec{F}) = -\int_1^3 \frac{1}{1+t^2}\,dt = 2(\underbrace{\arctan 1}_{=\frac{\pi}{4}} - \arctan 3)$$

$\gamma_1 \begin{cases} x=t \\ y=1 \end{cases} 1 \le t \le 3 \qquad \gamma_4 \begin{cases} x=1 \\ y=t \end{cases} 1 \le t \le 3$

$$L_{\gamma_2}(\vec{F}) = L_{\gamma_3}(\vec{F}) = \int_1^3 \frac{3}{9+t^2}\,dt = 2(\underbrace{\arctan 1}_{\frac{\pi}{4}} - \arctan \tfrac{1}{3})$$

$\gamma_2 \begin{cases} x=3 \\ y=t \end{cases} 1 \le t \le 3 \qquad \gamma_4 \begin{cases} x=t \\ y=3 \end{cases} 1 \le t \le 3$

Essendo $\arctan \frac{1}{x} + \arctan x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \neq 0$ otteniamo

$$L_\gamma(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{4} L_{\gamma_i}(\vec{F}) = \pi - 2(\arctan 3 + \arctan \tfrac{1}{3}) = \pi - 2(\tfrac{\pi}{2}) = 0,$$

cioè $L_\gamma(\vec{F}) = 0$.

In realtà il lavoro di $\vec{F}$ è nullo lungo qualunque curva chiusa che non si autointerseca e che non racchiude l'origine. Anche questo non è un caso.

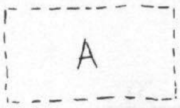
2^a PROPRIETÀ DEI CAMPI VETTORIALI (di classe C^1) AVENTI TUTTE LE DERIVATE IN CROCE UGUALI:

Se γ è una curva chiusa che non si autointerseca (C^1 a tratti e con sostegno contenuto nel dominio di $\vec{F}$) che si può rimpicciolire fino a un punto senza uscire dal dominio di $\vec{F}$, allora $L_\gamma(\vec{F})=0$.

Sia ora $\vec{F}$ un campo vettoriale di classe C^1 definito su un aperto connesso A e avente tutte le derivate in croce uguali. Vogliamo vedere se $\vec{F}$ è conservativo. Ricordiamo (Teorema a pag. 140) che

$\vec{F}$ è conservativo $\Leftrightarrow L_\gamma(\vec{F})=0 \quad \forall \gamma$ C^1 a tratti e chiusa con sostegno contenuto in A.

Supponiamo che l'aperto su cui è definito $\vec{F}$ sia un rettangolo (aperto): notiamo che A è tale che ogni curva chiusa che non si autointerseca con sostegno contenuto in A si può rimpicciolire fino a un punto senza uscire da A.



Allora per la 2^a proprietà dei campi aventi tutte le derivate in croce uguali possiamo concludere che $L_\gamma(\vec{F})=0$ per ogni curva γ C^1 a tratti e chiusa con sostegno contenuto in A e dunque $\vec{F}$ è conservativo (su A).

Supponiamo ora che l'aperto su cui $\vec{F}$ è definito sia tutto $\mathbb{R}^2$: anche in questo caso tutte le curve chiuse che non si autointersecano si possono rimpicciolire fino a un punto senza uscire dal dominio di $\vec{F}$. Avendo $\vec{F}$ tutte le derivate in croce uguali, per la 2^a proprietà concludiamo che $L_\gamma(\vec{F})=0$ per ogni curva γ C^1 a tratti e chiusa e anche in questo caso $\vec{F}$ è conservativo.

Questo significa che la condizione di avere tutte le derivate in croce uguali è sufficiente a garantire che il campo sia conservativo solo su domini di forma particolare. I domini "buoni" sono quelli nei quali ogni curva chiusa che non si autointerseca si può rimpicciolire fino a un punto senza uscire dal dominio.

<u>Definizione</u> (APERTO SEMPLICEMENTE CONNESSO). Un aperto connesso del piano o dello spazio ($A \subset \mathbb{R}^2$ o $A \subset \mathbb{R}^3$) si dice SEMPLICEMENTE CONNESSO se ogni curva γ C^1 a tratti, chiusa e che non si autointerseca con sostegno contenuto in A si può rimpicciolire fino a un punto senza uscire da A.

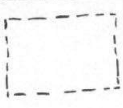
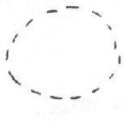
<u>TEOREMA</u> (CONDIZIONI SUFFICIENTI AFFINCHÈ UN CAMPO SIA CONSERVATIVO). Sia $\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ($\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) un campo vettoriale di classe C^1 definito su un aperto A.
Se si verifica che

i) $\vec{F}$ ha tutte le derivate in croce uguali,

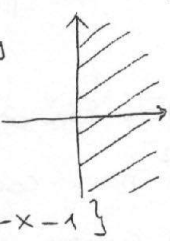
ii) A è semplicemente connesso,

allora $\vec{F}$ è conservativo.

<u>ESEMPI di insiemi SEMPLICEMENTE CONNESSI in $\mathbb{R}^2$</u>

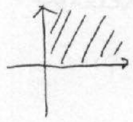
A=rettangolo aperto  A=cerchio aperto 

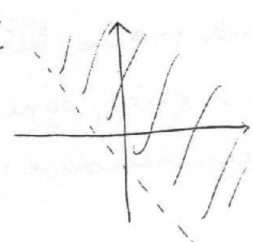
A =  $A = \mathbb{R}^2$ un qualunque semipiano aperto

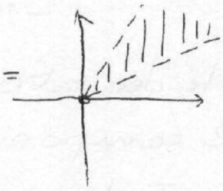
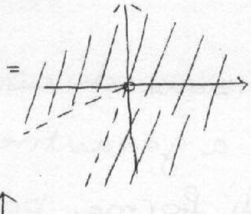
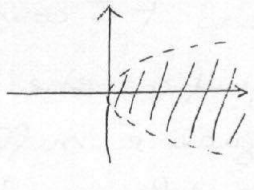
$A = \{(x,y): x>0\}$ 

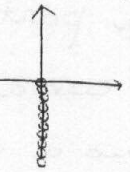
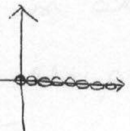
anche $y \notin A$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0,\ y>0\}$

 o qualunque altro quadrante aperto

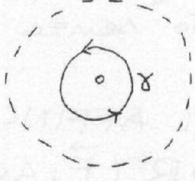
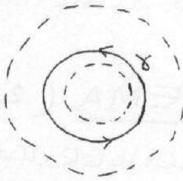
$A = \{(x,y): y > -x-1\}$ 

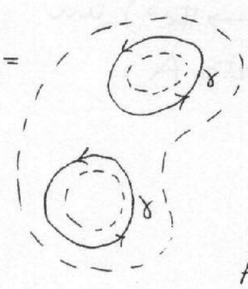
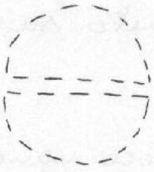
$A =$  $A =$  $A =$ 

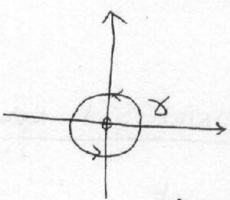
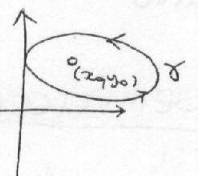
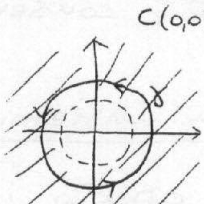
$A = \mathbb{R}^2 \setminus$ un semiasse  $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \le 0\}$  $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \ge 0\}$

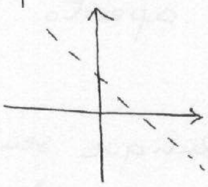
ESEMPI di insiemi NON SEMPLICEMENTE CONNESSI in $\mathbb{R}^2$

Per mostrare che A non è semplicemente connesso in ogni figura compare il disegno di una curva che non si può rimpicciolire fino a un punto senza uscire da A.

$A =$ cerchio aperto $\setminus$ il centro  $A =$ corona circolare 

$A =$  $A =$  non è semplicemente connesso perchè non è connesso, ma ogni parte connessa di A è semplicemente connessa

$A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0,y_0)\}$  $A = \mathbb{R}^2 \setminus$ cerchio chiuso $C(0,0)$, raggio R 

$A = \mathbb{R}^2 \setminus$ una retta  non è semplicemente connesso perchè non è connesso, ma ognuno dei due semipiani in cui $\mathbb{R}^2$ è diviso dalla retta è semplicemente connesso.

OSSERVAZIONE. Si osservi che un aperto semplicemente connesso del piano $\mathbb{R}^2$ non contiene buchi: infatti se l'aperto presenta un buco, ogni curva chiusa che gira intorno al buco non si può rimpicciolire fino a un punto senza uscire dall'aperto.

ESEMPI di insiemi SEMPLICEMENTE CONNESSI in $\mathbb{R}^3$

$A=\mathbb{R}^3$ $\quad A=\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ $\quad A=\mathbb{R}^3\setminus\{(x_0,y_0,z_0)\}$ $\quad A=\mathbb{R}^3\setminus$ palla chiusa $C(0,0,0)$, raggio R

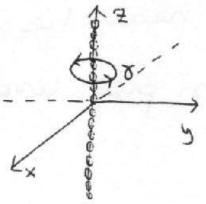
$A=\mathbb{R}^3\setminus$ palla chiusa $C(x_0,y_0,z_0)$, raggio R $\quad A=$ sfera aperta $\quad A=$ parallelepipedo aperto

$A=\mathbb{R}^3\setminus$ semiasse $\quad A=\mathbb{R}^3\setminus$ semiretta $\quad A=\{(x,y,z):\ z>-x-y+1\}$ o qualunque altro semispazio

$A=\{(x,y,z):\ x>0,\ y>0,\ z>0\}$ o qualunque altro ottante.

ESEMPI di insiemi NON SEMPLICEMENTE CONNESSI in $\mathbb{R}^3$

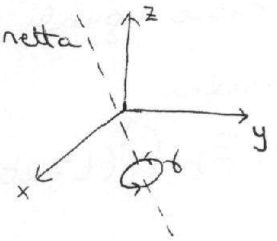
$A=\mathbb{R}^3\setminus$ asse z



$A=\mathbb{R}^3\setminus$ asse x

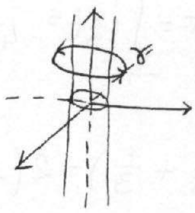
$A=\mathbb{R}^3\setminus$ asse y

$A=\mathbb{R}^3\setminus$ retta



$A=\{(x,y,z):\ x^2+y^2>1\}$

$\mathbb{R}^3\setminus$ un cilindro chiuso



OSSERVAZIONE (IMPORTANTE). Se $\vec{F}$ è un campo vettoriale di classe C^1 avente tutte le derivate in croce uguali definito su un aperto non semplicemente connesso, allora $\vec{F}$ può essere conservativo oppure non essere conservativo. Si vedano gli esempi più avanti.

Per campi vettoriali definiti su un aperto di $\mathbb{R}^3$ il teorema che fornisce condizioni sufficienti affinché un campo sia conservativo si può riscrivere nel seguente modo.

Teorema (COND. SUFFICIENTI AFFINCHÈ UN CAMPO SU $\mathbb{R}^3$ sia CONSERVATIVO). Sia $\vec{F}: A\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 definito su un aperto semplicemente connesso. Allora

$$\vec{F} \text{ è CONSERVATIVO} \iff \vec{F} \text{ è IRROTAZIONALE}.$$

Quest' ultimo risultato è applicato spesso in fisica a campi vettoriali definiti su $\mathbb{R}^3$ o su $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ (che sono semplicemente connessi): per campi di questo tipo è sufficiente verificare che $\text{rot}\,\vec{F}=(0,0,0)$ per avere che $\vec{F}$ è conservativo.

ESEMPI • Dite se il campo vettoriale $\vec{F}(x,y)=(x^2-2xy, y^2-2xy)$ è conservativo sul suo dominio; calcolate $L_\gamma(\vec{F})$ dove $\gamma \begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases} t\in[-1,1]$

dom $\vec{F}=\mathbb{R}^2$, $\vec{F}\in C^1(\mathbb{R}^2)$, $\frac{\partial F_1}{\partial y}=-2x \neq -2y=\frac{\partial F_2}{\partial x} \Rightarrow$ $\vec{F}$ non è conservativo.

Non essendo $\vec{F}$ conservativo e non avendo neanche le derivate in croce uguali, per calcolare il lavoro si può usare solo la formula:

$$L_\gamma(\vec{F})=\int_{-1}^{1}[(t^2-2t^3)+(t^4-2t^3)\cdot 2t]\,dt=\int_{-1}^{1}(2t^5-4t^4-2t^3+t^2)\,dt=$$

$$=\left[2\frac{t^6}{6}-4\frac{t^5}{5}-2\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1}=2\left(-\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\right)=2\left(-\frac{7}{15}\right)=\boxed{-\frac{14}{15}}.$$

• Dite se il campo vettoriale $\vec{F}(x,y)=(2xy, x^2+y^2)$ è conservativo sul suo dominio; calcolate $L_\gamma(\vec{F})$ dove γ ha equazioni parametriche $\begin{cases} x=e^{\text{sen}\,t}-1 \\ y=\frac{1}{2}(t+\pi) \end{cases} t\in[0,\pi]$.

dom $\vec{F}=\mathbb{R}^2$, $\vec{F}\in C^1(\mathbb{R}^2)$, $\frac{\partial F_1}{\partial y}=2x=\frac{\partial F_2}{\partial x}$: allora $\vec{F}$ ha le derivate in croce uguali ed è definito su $\mathbb{R}^2$ che è un insieme semplicemente connesso. Per il Teorema che fornisce condizioni sufficienti affinchè un campo vettoriale sia conservativo, concludiamo che $\vec{F}$ è conservativo su $\mathbb{R}^2$.

Essendo $\vec{F}$ conservativo, per calcolare $L_\gamma(\vec{F})$ abbiamo più metodi

$L_\gamma(\vec{F})$
- → la formula
- → $= f(P_{fin})-f(P_{in})$ dove f è un qualunque potenziale di $\vec{F}$
- → cambio γ in un'altra curva avente lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale.

Calcolando $L_\gamma(\vec{F})$ con la formula si trova un integrale difficile da calcolare - Proviamo allora le altre due strade:

- POTENZIALE Cerco le funzioni potenziali associate al campo $\vec{F}$:

$$f \in C^1(\mathbb{R}^2) : \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2+y^2 \end{cases} \longrightarrow f(x,y) = x^2y + g(y)$$ sono tutte le funzioni che risolvono la 1ª eq.ne ($g(y)$ è una qualunque funzione di classe C^1 di y)

Sostituiamo nella 2ª eq.ne:

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2y+g(y)) = x^2+g'(y) = x^2+y^2 \Rightarrow g'(y)=y^2 \quad g(y) = \frac{y^3}{3}+c$$

SOL.NI $f(x,y) = x^2y + \frac{y^3}{3}+c$

punto iniziale di $\gamma = P_{in} = (0,\frac{\pi}{2})$ punto finale di $\gamma = P_{fin} = (0,\pi)$

$$L_\gamma(\vec{F}) = f(P_{fin}) - f(P_{in}) = f(0,\pi) - f(0,\pi/2) = \frac{\pi^3}{3} - \frac{(\pi/2)^3}{3} = \boxed{\frac{7}{24}\pi^3}$$

- CAMBIARE LA CURVA Considero la curva che percorre il segmento da $(0,\pi/2)$ a $(0,\pi)$: $\gamma_1 \begin{cases} x=0 \\ y=t \end{cases} t \in [\frac{\pi}{2},\pi]$.

$$L_\gamma(\vec{F}) = L_{\gamma_1}(\vec{F}) = \int_{\pi/2}^{\pi} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{\pi/2}^{\pi} = \boxed{\frac{7}{24}\pi^3}$$

- Dite se il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = \left(-\frac{y+x}{x^2+y^2}, \frac{x-y}{x^2+y^2}\right)$ è conservativo nel suo dominio e calcolate $L_\gamma(\vec{F})$ lungo le 3 curve:

$$\gamma_1 \begin{cases} x = e^{\text{sen}\, t}-1 \\ y = \frac{1}{2}(t+\pi) \end{cases} t \in [0,\pi] \quad \gamma_2 \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \text{sen}\, t \end{cases} t \in [0,2\pi] \quad \gamma_3 \begin{cases} x = 2+\cos t \\ y = 2+\text{sen}\, t \end{cases} t \in [0,2\pi].$$

$\text{dom}\,\vec{F} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$, $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{y^2-x^2+2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$:

$\vec{F}$ ha le derivate in croce uguali, ma il suo dominio non è semplicemente connesso - Pertanto non sappiamo ancora se $\vec{F}$ è o non è conservativo - Calcoliamo il lavoro di $\vec{F}$ lungo la curva $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\text{sen}\, t \end{cases}$ $t \in [0,2\pi]$ che gira intorno all'origine (punto che rende $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non semplicemente connesso):

$$L_\gamma(\vec{F}) = \int_0^{2\pi} [-(\operatorname{sen}t+\cos t)(-\operatorname{sen}t) + (\cos t-\operatorname{sen}t)\cos t]\,dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi \neq 0.$$

Abbiamo trovato una curva chiusa su cui $L_\gamma(\vec{F}) \neq 0$, allora $\vec{F}$ non è conservativo su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

CALCOLO del LAVORO. Pur non essendo $\vec{F}$ conservativo, $\vec{F}$ ha le derivate in croce uguali e quindi ci sono vari modi per calcolare il lavoro.

LAVORO su γ_2 — γ_2 ha come sostegno l'ellisse di $C(0,0)$, semiassi $(2,1)$ percorsa in verso antiorario. Poiché γ_2 si può trasformare con continuità in $\gamma \begin{cases} x=\cos t \\ y=\operatorname{sen}t \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$, per la 1ª proprietà dei campi aventi le derivate in croce uguali (pag. 148) possiamo dire che

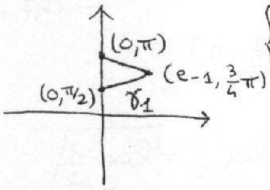
$$L_{\gamma_2}(\vec{F}) = L_\gamma(\vec{F}) = 2\pi.$$

LAVORO su γ_3 — γ_3 ha come sostegno la circonferenza di $C(2,2), R=1$ (percorsa in verso antiorario). Poiché γ_3 si può rimpicciolire fino a un punto senza uscire dal dominio di $\vec{F}$, per la 2ª proprietà dei campi aventi le derivate in croce uguali (p. 149) possiamo concludere che $L_{\gamma_3}(\vec{F}) = 0$.

LAVORO su γ_1 — Applicando la formula si ottiene un integrale troppo complicato.

OSSERVAZIONE IMPORTANTE. Un campo avente le derivate in croce uguali è conservativo su ogni sottoinsieme semplicemente connesso del suo dominio perché, detto A il sottoinsieme, ogni curva γ chiusa C^1 a tratti con sostegno contenuto in A si può rimpicciolire fino a un punto senza uscire da A e dunque $L_\gamma(\vec{F}) = 0$.

Torniamo alla nostra curva γ_1: γ_1 ha sostegno contenuto, ad esempio, nel semipiano aperto $A = \{(x,y) : y > 0\}$ che è semplicemente connesso.



$\begin{cases} x' = e^{\operatorname{sen} t} \cos t \\ y' = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\quad \gamma'(0) = (1, \frac{1}{2}) \quad \gamma'(\frac{\pi}{2}) = (0, \frac{1}{2}) \quad \gamma'(\pi) = (-1, \frac{1}{2})$

$\vec{F}$ è dunque conservativo su A.

Possiamo allora calcolare $L_{\gamma_1}(\vec{F})$ cercando un potenziale o cambiando γ_1.

POTENZIALE Il potenziale non è facilissimo da calcolare:

$$f \in C^1(A): \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{y+x}{x^2+y^2} \longrightarrow f(x,y) = \displaystyle\int -\frac{y+x}{x^2+y^2}\,dx + g(y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x-y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

Dobbiamo trovare una primitiva di $-\dfrac{y+x}{x^2+y^2}$:

$$-\int \frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \int \frac{x}{x^2+y^2}\,dx = -\frac{y}{y^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) =$$

serve dividere per y: possiamo perché in A $y > 0$

$$= -\int \frac{\frac{1}{y}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) = -\arctan\frac{x}{y} - \frac{1}{2}\log(x^2+y^2).$$

Tutte le funzioni che verificano la 1ª eq.ne sono date da

$$f(x,y) = -\arctan\frac{x}{y} - \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + g(y).$$

Sostituendo nella 2ª eq.ne si trova

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\arctan\frac{x}{y} - \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + g(y)\right) = -\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right) - \frac{y}{x^2+y^2} + g'(y) =$$

$$= \frac{x-y}{x^2+y^2} + g'(y) = \frac{x-y}{x^2+y^2} \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c$$

Sol.ni $\quad f(x,y) = -\arctan\dfrac{x}{y} - \dfrac{1}{2}\log(x^2+y^2) + c.$

$$L_{\gamma_1}(\vec{F}) = f(0,\pi) - f(0,\pi/2) = -\frac{1}{2}\log(\pi^2) + \frac{1}{2}\log\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) = \boxed{\log\frac{1}{2}}$$

CAMBIARE LA CURVA. Prendiamo di nuovo $\tilde{\gamma}\begin{cases} x=0 \\ y=t \end{cases}$ $t\in[\frac{\pi}{2},\pi]$:

$$L_{\gamma_1}(\vec{F}) = L_{\tilde{\gamma}}(\vec{F}) = \int_{\pi/2}^{\pi} -\frac{t}{t^2}\,dt = \int_{\pi/2}^{\pi} -\frac{1}{t}\,dt = -\left[\log t\right]_{\pi/2}^{\pi} = -\log\pi + \log\frac{\pi}{2} = \boxed{\log\frac{1}{2}}.$$

- Dite se il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2} + e^{2y}\right)$ è conservativo sul suo dominio.

$\operatorname{dom}\vec{F} = \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $\vec{F}\in C^1(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$, $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$:

$\vec{F}$ ha le derivate in croce uguali, ma è definito su $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ che non è semplicemente connesso. Non possiamo applicare il teorema che fornisce condizioni sufficienti, ma questo non significa che $\vec{F}$ non è conservativo. Calcoliamo il lavoro di $\vec{F}$ lungo γ

$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\operatorname{sen} t \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$: $L_\gamma(\vec{F}) = \int_0^{2\pi}\left[2\cos t(-\operatorname{sen} t) + \left[2\operatorname{sen} t + e^{2\operatorname{sen} t}\right]\cos t\right]dt =$

$$= \int_0^{2\pi} e^{2\operatorname{sen} t}\cos t\,dt = \left[\frac{e^{2\operatorname{sen} t}}{2}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Essendo $L_\gamma(\vec{F}) = 0$, calcoliamo il potenziale di $\vec{F}$:

$f\in C^1(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$: $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} \longrightarrow f(x,y) = \log(x^2+y^2) + g(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2} + e^{2y} \end{cases}$

Sostituendo nella 2ª : $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\log(x^2+y^2) + g(y)\right) =$

$$= \frac{2y}{x^2+y^2} + g'(y) = \frac{2y}{x^2+y^2} + e^{2y} \Rightarrow g'(y) = e^{2y} \quad g(y) = \frac{1}{2}e^{2y} + c$$

SOL.NE: $f(x,y) = \log(x^2+y^2) + \frac{1}{2}e^{2y} + c$.

Allora <u>$\vec{F}$ è conservativo su $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.</u>

• Determinate la funzione $a(x) \in C^1(\mathbb{R})$ in modo che $\vec{F}(x,y) = (y + 3y\,a(x),\ x + 6y + a(x))$ sia conservativo su $\mathbb{R}^2$ e che il vettore $\vec{F}(0,1)$ risulti ortogonale a $\vec{v} = (1,-1)$.

$\vec{F}$ è definito su tutto $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso, allora

$$\vec{F} \text{ è conservativo } \Longleftrightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Otteniamo allora $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 + 3a(x) = 1 + a'(x) = \frac{\partial F_2}{\partial x}$, cioè

$a'(x) = 3a(x)$.

Vuol dire che $a(x)$ è una funzione che derivata dà 3 volte la funzione stessa: questa è un'equazione differenziale (omogenea) e precisamente $y' = 3y$ che ha come sol.ne $y(x) = ce^{3x}$.

Allora $\vec{F}$ è conservativo se $a(x) = ce^{3x}$, $c \in \mathbb{R}$. Vediamo ora la 2ª condizione: $\vec{F}(x,y) = (y + 3cye^{3x},\ x + 6y + ce^{3x})$,

$\vec{F}(0,1) = (1+3c, 6+c)$ $\quad \langle \vec{F}(0,1), (1,-1) \rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle (1+3c, 6+c), (1,-1) \rangle = 0$

$\Longleftrightarrow 1 + 3c - 6 - c = 0 \Longleftrightarrow 2c - 5 = 0 \Longleftrightarrow c = \frac{5}{2}$.

SOL.NE $a(x) = \frac{5}{2}e^{3x}$, $\vec{F}(x,y) = \left(y + \frac{15}{2}ye^{3x},\ x + 6y + \frac{5}{2}e^{3x}\right)$.

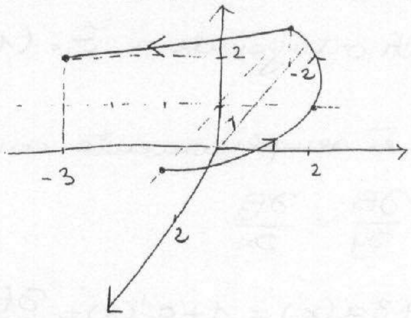
• Sia $\vec{F}$ il campo vettoriale definito da $\vec{F}(x,y,z) = (2y, 2x+z, x+y)$ e sia γ la curva di equazioni parametriche

$$\gamma : [-\pi, 1] \to \mathbb{R}^3 \qquad \begin{cases} x = -2\cos t \\ y = -2\sin t \\ z = 1 \end{cases} \ t \in [-\pi, 0] \qquad \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases} \ t \in [0,1].$$

a) dite se $\vec{F}$ è conservativo sul suo dominio;
b) disegnate il sostegno di γ;
c) calcolate $L_\gamma(\vec{F})$.

a) $\mathrm{dom}\,\vec{F} = \mathbb{R}^3$, $\vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$, $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2 = \frac{\partial F_2}{\partial x}$, $\frac{\partial F_1}{\partial z} = 0 \neq 1 = \frac{\partial F_3}{\partial x}$, $\frac{\partial F_2}{\partial z} = 1 = \frac{\partial F_3}{\partial y}$. Le derivate in croce non sono tutte uguali $\Rightarrow$ $\underline{\vec{F} \text{ non è conservativo}}$.

b) γ è composta da una semicirconferenza nel piano $z=1$ ($C=(0,0,1)$, $R=2$ da $(2,0,1)$ a $(-2,0,1)$) e dal segmento congiungente $(-2,0,1)$ a $(0,-3,2)$.



$P_{in}=(2,0,1)$ $P_{fin}=(0,-3,2)$

c) $$L_\gamma(\vec{F}) = \int_{-\pi}^{0}[(-4\operatorname{sen}t)(2\operatorname{sen}t)+(-4\cos t+1)(-2\cos t)]\,dt +$$

$$+\int_0^1[(-6t)\cdot 2+(-4+4t+1+t)(-3)+(-2+2t-3t)]dt =$$

$$= 0+\int_0^1(-28t+7)\,dt = \boxed{-7}$$

- Dite se il campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z)=\left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}+2y, \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right)$ è conservativo sul suo dominio; calcolate poi $L_\gamma(\vec{F})$ dove γ è la stessa dell'esempio precedente.

$\operatorname{dom}\vec{F}=\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$, $\vec{F}\in C^1(\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\})$, le derivate in croce sono tutte uguali:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}=\frac{-4xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{\partial F_2}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_1}{\partial z}=\frac{-4xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{\partial F_3}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial z}=\frac{-4yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

Essendo $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ un aperto semplicemente connesso, possiamo applicare il teorema che fornisce condizioni sufficienti e concludere che $\vec{F}$ è conservativo su $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$.

Per calcolare il $L_\gamma(\vec{F})$ possiamo calcolare il potenziale oppure cambiare γ.

POTENZIALE: $f\in C^1(\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\})$: $$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}+2y\\ \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\end{cases}$$

Dalla 1ª eq.ne otteniamo $f(x,y,z) = \log(x^2+y^2+z^2) + g(y,z)$.

Sostituendo nella 2ª $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\log(x^2+y^2+z^2) + g(y,z)\right) =$

$= \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} + \frac{\partial}{\partial y} g(y,z) = \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} + 2y \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 2y$.

Le funzioni che verificano le 1e 2 eq.ni sono allora

$$f(x,y,z) = \log(x^2+y^2+z^2) + y^2 + h(z).$$

Sostituendo nella 3ª eq.ne si ha

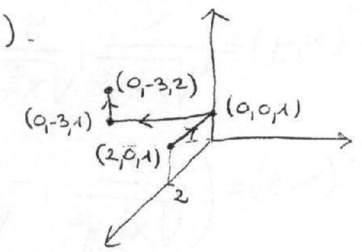
$\frac{\partial}{\partial z}\left(\log(x^2+y^2+z^2) + y^2 + h(z)\right) = \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} + h'(z) = \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow h'(z) = 0.$

SOL.NI $f(x,y,z) = \log(x^2+y^2+z^2) + y^2 + c$

$L_\gamma(\vec{F}) = f(0,-3,2) - f(2,0,1) = \boxed{9 + \log\frac{13}{5}}$

CAMBIARE LA CURVA - Prendiamo la curva $\tilde{\gamma}$ che ha per sostegno l'unione dei 3 segmenti da $(2,0,1)$ a $(0,0,1)$, da $(0,0,1)$ a $(0,-3,1)$, da $(0,-3,1)$ a $(0,-3,2)$.

Se $\tilde{\gamma}_1 \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} t \in [0,2]$ $\quad \tilde{\gamma}_2 \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} t \in [-3,0]$



$\tilde{\gamma}_3 \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \\ z = t \end{cases} t \in [1,2]$ allora

$$L_\gamma(\vec{F}) = L_{\tilde{\gamma}}(\vec{F}) = -L_{\tilde{\gamma}_1}(\vec{F}) - L_{\tilde{\gamma}_2}(\vec{F}) + L_{\tilde{\gamma}_3}(\vec{F}) =$$

$$= -\int_0^2 \frac{2t}{1+t^2}\,dt - \int_{-3}^0 \left(\frac{2t}{1+t^2} + 2t\right) dt + \int_1^2 \frac{2t}{9+t^2}\,dt =$$

$$= -\left[\log(1+t^2)\right]_0^2 - \left[\log(1+t^2) + t^2\right]_{-3}^0 + \left[\log(9+t^2)\right]_1^2 =$$

$$= -\log 5 + \cancel{\log} 10 + 9 + \log 13 - \cancel{\log} 10 =$$

$$= \boxed{9 + \log\frac{13}{5}}.$$

CAMPI VETTORIALI

RAPPRESENTAZIONE di un CAMPO VETTORIALE

Dopo averne determinato il dominio, date una descrizione dei seguenti campi vettoriali, disegnando alcuni vettori e calcolando il modulo di $\vec{F}$.

1) $\vec{F}(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\underline{i}+\frac{1}{2}\underline{j}$

2) $\vec{F}(x,y)=(x,y)=x\underline{i}+y\underline{j}$ (dimostrare in particolare che si tratta di un campo centrale)

3) $\vec{F}(x,y)=(x,0)=x\underline{i}$

4) $\vec{F}(x,y)=(1,x)=\underline{i}+x\underline{j}$

5) $\vec{F}(x,y)=(y,-1)=y\underline{i}-\underline{j}$

6) $\vec{F}(x,y)=(-y,x)=-y\underline{i}+x\underline{j}$ (dimostrare in particolare che ogni vettore è tangente al cerchio di $C(0,0)$ che passa per il punto in cui è applicata la forza: il campo si dice TANGENZIALE)

7) $\vec{F}(x,y)=(x,-y)=x\underline{i}-y\underline{j}$

8) $\vec{F}(x,y)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\underline{i}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\underline{j}$

9) $\vec{F}(x,y)=\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\underline{i}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\underline{j}$

10) $\vec{F}(x,y,z)=(-1,1,0)=-\underline{i}+\underline{j}$

11) $\vec{F}(x,y,z)=(0,0,z)=z\underline{k}$

12) $\vec{F}(x,y,z)=(0,y,0)=y\underline{j}$

13) $\vec{F}(x,y,z)=(0,z,0)=z\underline{j}$

14) $\vec{F}(x,y,z)=(x,y,z)=x\underline{i}+y\underline{j}+z\underline{k}$

15) $\vec{F}(x,y,z)=(x,y,0)=x\underline{i}+y\underline{j}$

Associate a ciascun campo vettoriale $\vec{F}$ la sua rappresentazione, motivando le ragioni della scelta.

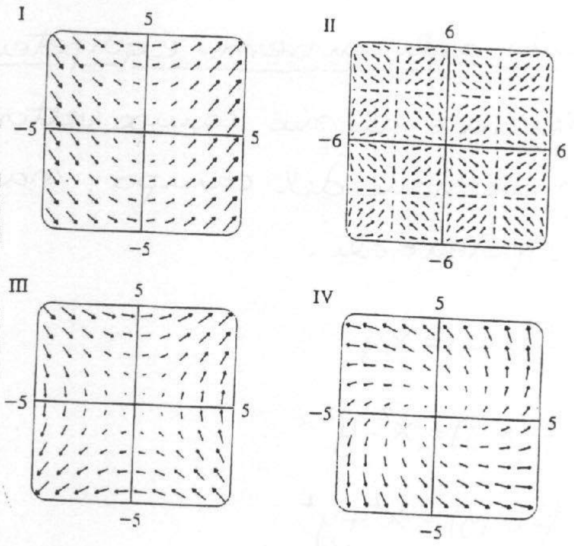
CAMPI VETTORIALI su $\mathbb{R}^2$

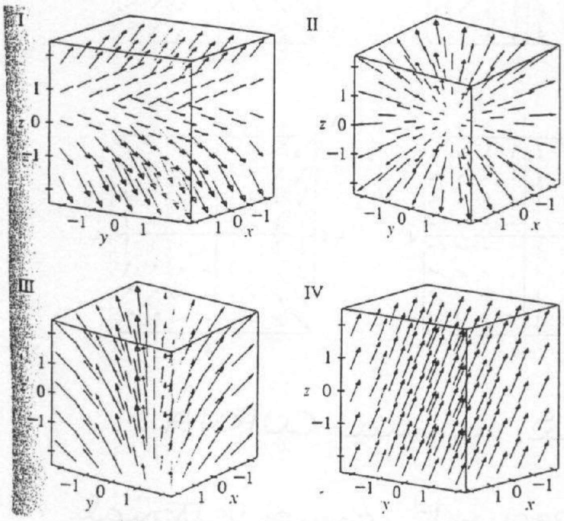
1) $\vec{F}(x,y) = (y,x)$

2) $\vec{F}(x,y) = (2x-3y, 2x+3y)$

3) $\vec{F}(x,y) = (\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} y)$

4) $\vec{F}(x,y) = (\log(1+x^2+y^2), x)$





CAMPI VETTORIALI su $\mathbb{R}^3$

1) $\vec{F}(x,y,z) = (1,2,3)$

2) $\vec{F}(x,y,z) = (1,2,z)$

3) $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,3)$

4) $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$

Trovate il campo vettoriale $\vec{F}$ individuato dal gradiente delle seguenti funzioni -

1) $f(x,y) = xy - 2x$ 2) $f(x,y) = \frac{1}{4}(x+y)^2$ 3) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

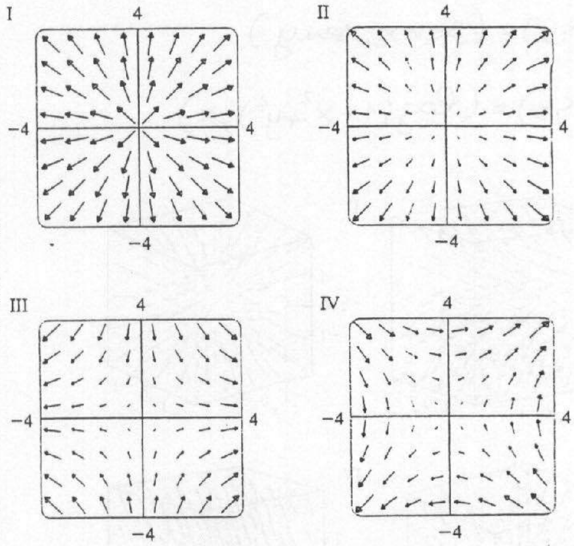
Un campo vettoriale $\vec{F}$ si dice CONSERVATIVO se esiste una funzione f (di classe C^1) tale che $\vec{F} = \nabla f$ e la funzione f si dice POTENZIALE associato al campo vettoriale $\vec{F}$. Gli insiemi di livello del potenziale f si dicono INSIEMI EQUIPOTENZIALI perché sono costituiti da tutti i punti aventi lo stesso valore del potenziale - Essendo il gradiente di una funzione ortogonale in ogni punto all'insieme di livello che passa per quel punto, avremo allora che il campo vettoriale $\vec{F}=\nabla f$ è ortogonale punto per punto agli insiemi equipotenziali. Associate ogni funzione potenziale al suo campo vettoriale, aiutandovi sia con l'espressione del campo, sia con il disegno degli insiemi equipotenziali.

1) $f(x,y)=xy$

2) $f(x,y)=x^2-y^2$

3) $f(x,y)=x^2+y^2$

4) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$



LAVORO di un CAMPO VETTORIALE su una CURVA.

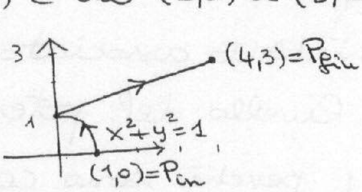
Calcolate il lavoro compiuto dai seguenti campi vettoriali sulle curve a fianco indicate.

1) $\vec{F}(x,y)=(x^2-2xy,\ y^2-2xy)$ $\quad \gamma \begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases}$ $t\in[-1,1]$ $\quad$ R. $-\frac{14}{15}$

2) $\vec{F}(x,y)=(x^2,\ -xy)$ $\quad \gamma \begin{cases} x=\cos t \\ y=\operatorname{sen} t \end{cases}$ $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$ $\quad$ R. $-\frac{2}{3}$

3) $\vec{F}(x,y)=(xy,\ x-y)$ $\quad \gamma$ ha come sostegno l'unione dei due segmenti da $(0,0)$ a $(2,0)$ e da $(2,0)$ a $(3,2)$ percorsi in questo ordine. $\quad$ R. $\frac{17}{3}$

4) $\vec{F}(x,y)=(x\sqrt{y},\ 2y\sqrt{x})$ $\quad \gamma$



R. $\frac{66}{5}+\frac{32}{5}\sqrt{3}$

5) $\vec{F}(x,y)=(x^2y^3,\ -y\sqrt{x})$ $\quad \gamma \begin{cases} x=t^2 \\ y=-t^3 \end{cases}$ $t\in[0,1]$ $\quad$ R. $-\frac{2}{15}-\frac{3}{7}$

6) $\vec{F}(x,y)=(y,x^2)$ γ ha come sostegno il ∂E percorso in verso orario, dove $E=E_1\cup E_2$ con

$$E_1=\{(x,y): -1\le x\le 0,\ x^2-1\le y\le x+1\}$$
$$E_2=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ x^2-1\le y\le \sqrt{1-x^2}\}.$$

R. $\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}$

7) $\vec{F}(x,y)=(y^2,x)$ γ ha come sostegno il ∂E percorso in verso antiorario, con $E=\{(x,y): y-2\le x\le 4-y^2\}$. R. $\frac{125}{3}$

8) $\vec{F}(x,y,z)=(x,y,z)$ $\gamma_1 \begin{cases} x=\cos t\\ y=\sin t\\ z=t\end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$ R. $2\pi^2$

$\gamma_2 \begin{cases} x=1\\ y=0\\ z=t\end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$ R. $2\pi^2$

Si poteva stabilire a priori che $L_{\gamma_1}(\vec{F})=L_{\gamma_2}(\vec{F})$?

9) $\vec{F}(x,y,z)=(\sqrt{z},x,y)$ $\gamma \begin{cases} x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\\ z=t^2\end{cases}$ $t\in[0,\pi/2]$

R. $\frac{3}{8}\pi^2-\frac{7}{4}\pi+4$

10) $\vec{F}(x,y,z)=(2xy,(x^2+z),y)$ γ ha per sostegno il segmento da $(1,0,2)$ a $(3,4,1)$. R. 40

11) $\vec{F}(x,y,z)=(y,z,x)$ γ ha come sostegno l'unione dei due segmenti da $(2,0,0)$ a $(3,4,5)$ e da $(3,4,5)$ a $(3,4,0)$ percorsi in questo ordine. R. $\frac{19}{2}$

12) $\vec{F}(x,y,z)=(xy,yz,zx)$ γ è la cubica ritorta

$\gamma \begin{cases} x=t\\ y=t^2\\ z=t^3\end{cases}$ $t\in[0,1]$ R. $\frac{27}{28}$

Esercizio del libro 6.29 R. $4\pi\sqrt{2}$

CAMPI CONSERVATIVI e POTENZIALE

Dite se i seguenti campi vettoriali sono <u>conservativi</u> nel loro dominio e, in caso affermativo, calcolatene un <u>potenziale</u>.

1) $\vec{F}(x,y)=(x,y-1)$ 2) $\vec{F}(x,y)=(y,-x)$

3) $\vec{F}(x,y)=(1+ye^{xy}, xe^{xy}+\cos y)$

4) $\vec{F}(x,y)=(6x+5y, 5x+4y)$ 5) $\vec{F}(x,y)=(x^3+4xy, 4xy-y^3)$

6) $\vec{F}(x,y)=\left(\frac{2xy}{(1+x^2)^2}, -\frac{1}{1+x^2}\right)$ 7) $\vec{F}(x,y)=(e^y, xe^y)$

8) $\vec{F}(x,y)=\left(\frac{y+2x}{x^2+y^2}, \frac{2y-x}{x^2+y^2}\right)$ 9) $\vec{F}(x,y)=\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}, \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}\right)$

10) $\vec{F}(x,y)=\left(-\frac{x}{x^2+y^2}+2\,\mathrm{sen}\,x\cos x, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$

11) $\vec{F}(x,y,z)=(yz, xz, xy+2z)$ 12) $\vec{F}(x,y,z)=(y, x, xyz)$

13) $\vec{F}(x,y,z)=(y^2\cos z, 2xy\cos z, -xy^2\,\mathrm{sen}\,z)$

14) $\vec{F}(x,y,z)=\left(\frac{2}{y}, -\frac{2x+z}{y^2}, \frac{1}{y}\right)$ in $A=\{(x,y,z): y>0\}$.

15) $\vec{F}(x,y,z)=\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$

16) $\vec{F}(x,y,z)=\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+z\cos y, \frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\mathrm{sen}\,y\right)$

ESERCIZI VARI sui campi vettoriali

1) Determinate le costanti $A, B \in \mathbb{R}$ in modo che il campo vettoriale, definito in $\mathbb{R}^2$,

$$\vec{F}(x,y)=(2\,\mathrm{sen}\,x\cos y + A\cos x\,\mathrm{sen}\,y,\ B\cos x\,\mathrm{sen}\,y+\mathrm{sen}\,x\cos y)$$

sia conservativo. Per tali valori di A e B determinate i potenziali del campo vettoriale $\vec{F}$.

2) Calcolate il lavoro del campo vettoriale $\vec{F}(x,y)=(xy,\frac{x^2}{2})$ lungo la curva $\gamma \begin{cases} x=t \\ y=\arctan \dfrac{1-\cos 3t}{(2-(\operatorname{sen} t)^2)} \end{cases}$ $t\in[0,\pi]$ R. $\frac{\pi^3}{8}$

3) Dite se il campo vettoriale $\vec{F}(x,y)=\left(1-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}, 1-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\right)$ è conservativo sul suo dominio. Calcolate poi il lavoro di $\vec{F}$ su γ, dove γ è la metà superiore dell'ellisse di $C(-2,2)$ e semiassi $(2,1)$, percorsa in verso orario. R. $\frac{21}{5}$

4) Determinate tutte le funzioni $a\in C^1(\mathbb{R})$ tali che il campo vettoriale $\vec{F}(x,y)=(3x^2y+a(y), x^3+x\,a(y))$ sia conservativo su $\mathbb{R}^2$. Calcolate poi, al variare di $a(y)$, un potenziale del campo.

5) Calcolate il lavoro del campo vettoriale $\vec{F}(x,y)=(3+2xy, x^2-3y^2)$ sulla curva $\gamma \begin{cases} x=e^t \operatorname{sen} t \\ y=e^t \cos t \end{cases}$ $t\in[0,\pi]$ R. $e^{3\pi}+1$

6) Dato il campo vettoriale su $\mathbb{R}^2$

$$\vec{F}(x,y)=(2x^2+y^2, axy)$$

dipendente da $a\in\mathbb{R}$, dite:

i) per quali valori di a il $L_\gamma(\vec{F})=0$ con $\gamma \begin{cases} x=\cos t \\ y=\operatorname{sen} t \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$

ii) per quali valori di a $\vec{F}$ è conservativo.

7) Calcolate il lavoro del campo vettoriale $\vec{F}(x,y)=(x^3y^4, x^4y^3)$ su $\gamma \begin{cases} x=\sqrt{t} \\ y=1+t^3 \end{cases}$ $t\in[0,1]$. R. 4

8) Calcolate il lavoro del campo vettoriale $\vec{F}(x,y)=(e^{2y}, 1+2xe^{2y})$ su $\gamma \begin{cases} x=te^t \\ y=1+t \end{cases}$ $t\in[0,1]$. R. e^5+1

9) Calcolate il lavoro del campo vettoriale $\vec{F}(x,y)=\left(\frac{y+x}{x^2+y^2}, \frac{y-x}{x^2+y^2}\right)$ su γ_1, dove γ_1 ha per sostegno

la circonferenza di $C(1,1)$ e $R=1$ percorsa in verso antiorario partendo da $(2,1)$, e su γ_2, dove γ_2 ha per sostegno l'ellisse di $C(0,0)$ e semiassi $(1,2)$ percorsa in verso antiorario partendo da $(1,0)$.

R. $L_{\gamma_1}=0$ $L_{\gamma_2}=-2\pi$

10) Stabilite se il campo vettoriale $\vec{F}(x,y)=(xy, x^2+y^2)$ è conservativo sul suo dominio. Calcolate poi il lavoro di $\vec{F}$ sulle due curve

γ_1 = ellisse di $C(0,0)$ semiassi $(2,3)$ percorsa in senso orario

R. $L_{\gamma_1}=0$

γ_2 = circonferenza di $C(1,1)$ $R=1$ percorsa in verso antiorario.

R. $L_{\gamma_2}=\pi$

11) Dato il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y)=\left(\frac{2x}{[x^2+(y-1)^2]^2}, \frac{2y+\lambda}{[x^2+(y-1)^2]^2}\right)$$

dove $\lambda\in\mathbb{R}$, determinate:

i) per quali valori di λ il campo è conservativo,

ii) i potenziali associati a $\vec{F}$ in corrispondenza ai valori di λ determinati al punto i).

R. $\lambda=-2$

12) Stabilite se il campo vettoriale $\vec{F}(x,y)=\left(ye^{xy}-\frac{y}{x^2+y^2}, xe^{xy}+\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ è conservativo sul suo dominio. Calcolate poi il lavoro di $\vec{F}$ lungo le 2 curve

γ_1 = circonferenza di $C(2,2)$, $R=1$ percorsa in verso orario

R. $L_{\gamma_1}=0$

γ_2 = circonferenza di $C(0,0)$, $R=2$ percorsa in verso orario.

R. $L_{\gamma_2}=-2\pi$

13) Determinate tutte le funzioni $a\in C^1(\mathbb{R})$ tali che il campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z)=(x-xe^z, -y, a(x)e^z)$ sia conservativo su $\mathbb{R}^3$. Determinate poi i potenziali del campo in corrispondenza alla funzione $a(x)$ tale che $a(0)=3$.

R. $a(x)=-\frac{x^2}{2}+C$

14) Dato il campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z)=(y^2, 2xy+e^{3z}, 3ye^{3z})$ calcolate in 2 modi diversi il lavoro di $\vec{F}$ su γ, dove γ è data da $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=3\,\mathrm{sen}\,t \\ z=0 \end{cases}$ $t\in[0,\pi/2]$. R. 3

15) Siano $\gamma_1:[-\frac{\pi}{2},0]\to\mathbb{R}^3$ e $\gamma_2:[0,\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{R}^3$ le curve di eq.ni parametriche

$$\gamma_1\begin{cases} x=0 \\ y=\mathrm{sen}\,t \\ z=\cos t-1 \end{cases} \qquad \gamma_2\begin{cases} x=1-\cos t \\ y=\mathrm{sen}\,t \\ z=0. \end{cases}$$

Dopo aver disegnato il sostegno delle due curve, calcolate in due modi diversi il lavoro compiuto dal campo $\vec{F}(x,y,z)=(2x, 3y, (4z-x))$ su γ_1 e su γ_2. R. $L_{\gamma_1}=-\frac{7}{2}$

$L_{\gamma_2}=5/2$

(Suggerimento: scrivete $\vec{F}$ come somma di 2 campi, di cui uno conservativo).

16) Calcolate il lavoro del campo $\vec{F}(x,y,z)=(y^2\cos z, 2xy\cos z, -xy^2\,\mathrm{sen}\,z)$ su $\gamma\begin{cases} x=t^2 \\ y=\mathrm{sen}\,t \\ z=t \end{cases}$ $t\in[0,\pi]$. R. 0

17) Dite se il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y,z)=\left(\frac{2xz}{(x^2+y^2+z^2)}, \frac{2yz}{(x^2+y^2+z^2)}+2, \log(x^2+y^2+z^2)+\frac{2z^2}{(x^2+y^2+z^2)}\right)$$

è conservativo sul suo dominio e in caso affermativo calcolatene i potenziali.

18) Dite se il campo $\vec{F}(x,y,z)=\left(yz-\frac{y}{x^2+y^2}, xz+\frac{x}{x^2+y^2}, xy+ze^z\right)$ è conservativo sul suo dominio. Calcolate poi il lavoro di $\vec{F}$ su $\gamma\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\,\mathrm{sen}\,t \\ z=t \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$. R. $2\pi+e^{2\pi}(2\pi-1)+1$

19) Dite se il campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z)=\left(\frac{-2xz}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-2yz}{(x^2+y^2)^2}, \frac{1}{x^2+y^2}\right)$ è conservativo sul suo dominio.
Calcolate poi il lavoro di $\vec{F}$ sulla stessa γ dell'es. 18). R. $+\pi/2$

20) Calcolate il lavoro del campo $\vec{F}(x,y,z)=(2xz+y^2, 2xy, x^2+3z^2)$ su una qualunque curva che unisce $(0,1,-1)$ a $(1,2,1)$, dopo aver giustificato che il lavoro è indipendente dalla curva.

21) Usando il ROTORE di $\vec{F}$ mostrate che:

i) il campo $\vec{F}(x,y,z)=(xz, xyz, -y^2)$ non è conservativo,

ii) il campo $\vec{F}(x,y,z)=(y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$ è conservativo.

COMPITI d'esame

$\boxed{10/6/2002}$ Calcolate il lavoro del campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y)=\left(ye^x, e^x+\frac{2}{y}\log y\right)$$

sulla curva γ che percorre il grafico di $f(x)=(1-e)x^2+e$ per $x\in[0,1]$ nel verso delle x crescenti. R. -1

$\boxed{22/7/2002}$ Determinate tutte le funzioni $a\in C^1(\mathbb{R})$ tali che il campo vettoriale $\vec{F}(x,y)=\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}, a(x)\right)$ sia conservativo su $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{5/9/02}$ Sia γ la parte di elica cilindrica di equazioni $\begin{cases} x=\cos t\\ y=t\\ z=\operatorname{sen} t\end{cases}$ percorsa da $(1,0,0)$ a $(1,2\pi,0)$. Dopo aver disegnato il sostegno di γ, stabilite se il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y,z)=\left(2z, \frac{1}{x^2+z^2}, 2y\right)$$

è conservativo nel suo dominio e calcolate $L_\gamma(\vec{F})$. R. 0

$\boxed{26/9/02}$ Siano $a,b>0$ e sia $\gamma_{a,b}$ una curva avente per sostegno l'ellisse di equazione $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$. Calcolate il lavoro del campo vettoriale $\vec{F}(x,y)=(y,2x)$ su $\gamma_{a,b}$.

24/1/03 Esercizio 4) pag. 26

$\boxed{14/2/03}$ Sia $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, e sia $\vec{F}$ il campo vettoriale definito da
$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{4ax}{1+a^2x^2+y^2} + 2(x+1)y,\ \frac{2y}{1+a^2x^2+y^2} + (x+1)^2 \right).$$
Determinate:

i) per quale valore $a \neq 0$ il campo $\vec{F}$ è conservativo sul suo dominio,

ii) il $L_\gamma(\vec{F})$, dove γ è il quarto di ellisse $4x^2+y^2=1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, percorso in verso antiorario (con $\vec{F}$ corrispondente al valore di a determinato al punto i)).

$\boxed{12/6/03}$ Sia $\vec{F}$ il campo vettoriale definito da
$$\vec{F}(x,y) = \left(2\sqrt{y} + 2y^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}},\ \frac{x}{\sqrt{y}} + a^2xy + y \right),\ a \in \mathbb{R}.$$
Determinate:

i) il dominio di $\vec{F}$,

ii) per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il campo $\vec{F}$ risulta conservativo sul suo dominio,

iii) il lavoro di $\vec{F}$ su $\gamma \begin{cases} x = 2 + t\cos(\pi t) \\ y = 2 + t\,\mathrm{sen}(t\pi) \end{cases}$ $t \in [0,2]$ (in corrispondenza ai valori di a determinati al punto ii)). R. $18+3\sqrt{2}$

$\boxed{22/7/03}$ Sia $\vec{F}$ il campo vettoriale definito da
$$\vec{F}(x,y) = \left((2x-1)y,\ 4y^3 + x^2 \right).$$
Determinate un campo vettoriale $\vec{G} = (f(x,y), 0)$ tale che il campo $\vec{F}+\vec{G}$ sia conservativo su $\mathbb{R}^2$.
Aiutandovi con quanto appena mostrato calcolate il lavoro di $\vec{F}$ lungo la curva γ che ha come sostegno il bordo ∂D dell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4,\ |x| \leq \sqrt{2}\}$ percorso in verso antiorario.

R. $2(\pi+2)$

$\boxed{5/9/03}$ Sia $\vec{F}$ il campo vettoriale definito da

$$\vec{F}(x,y) = \left((\cos y)^2 (2x f(x)+1), -2(f(x)+x)\cos y \operatorname{sen} y \right)$$

con $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Determinate una funzione $f(x)$ tale che $f(0)=1$ e tale che il campo $\vec{F}$ sia conservativo in $\mathbb{R}^2$. Fissata tale funzione $f(x)$, calcolate poi il $L_\gamma(\vec{F})$, dove $\gamma \begin{cases} x = e^{\operatorname{sen} t} - 1 \\ y = \frac{1}{2}(t+\pi) \end{cases}$ $t \in [0,\pi]$.

R. $f(x) = e^{x^2}$, $L = 1$

$\boxed{25/9/03}$ Sia $\vec{F}$ il campo vettoriale definito da

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{y}{1+x^2+y^2}, \frac{e^y}{1+x^2+y^2} + f(y) \right)$$

on $f(y) = \dfrac{\log(1+y^2)}{1+e^{y^2}}$. Calcolate il lavoro di $\vec{F}$ lungo la circonferenza di $C(0,0)$, $R=1$, percorsa una volta in senso antiorario.

R. $-\pi/2$

(Suggerimento: il campo vettoriale $\vec{G}(x,y) = (0, f(y))$ è conservativo).

$\boxed{3/1/04}$ Sia $\vec{F}$ il campo vettoriale definito da

$$\vec{F}(x,y) = \left(y^3 + xy^3, 3xy^2 + g(x)y^2 + \cos y \right) \quad \text{con } g \in C^1(\mathbb{R}).$$

Determinate una funzione $g(x)$ tale che il campo $\vec{F}$ sia conservativo su $\mathbb{R}^2$ e $g(0)=0$.

Fissata tale funzione $g(x)$, calcolate il $L_\gamma(\vec{F})$, dove γ è la curva $\begin{cases} x = \cos(\log t) \\ y = \log t \end{cases}$ $t \in [1, e^{\pi/2}]$. R. 1

$\boxed{13/2/04}$ Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $\vec{F}$ il campo vettoriale definito da

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{1}{1+y^2}, \frac{\alpha xy}{(1+y^2)^2} + y e^{y^2} \right).$$

Determinate per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo $\vec{F}$ risulta conservativo sul suo dominio e calcolatene in corrispondenza tutti i potenziali.